DEVOIR MAISON BONUS n^o 1

Exercice 1.
Un digicode est composé de n boutons, ces boutons sont numérotés de 1 à n. Pour entrer, il faut pousser tous les boutons dans un certain ordre. La règle est la suivante :
- tous les boutons doivent être poussés une unique fois,
- il est possible de pousser plusieurs boutons en même temps.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on notera E_n l'ensemble des entiers de 1 à n.
On appellera un n-code, toute suite ordonnée $(P_1,P_2,\ldots,P_j)$, avec $j \in \mathbb{N}^\star$, vérifiant :
- pour tout $i \in [\![1,j]\!]$, $P_j \in \mathcal{P}(E_n)$,
- les parties P_1, $P_2,\ldots,P_n$ sont deux à deux disjointes,
- aucune partie n'est vide,
- l'union des parties P_1, $P_2,\ldots,P_n$ est égale à E_n.

On notera c_n le nombre de n-codes.
Par exemple, on a :
- $c_1 = 1$ car le seul 1-code possible est $(\{1\})$,
- $c_2 = 3$ car les 2-codes possibles sont : $(\{1\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\})$ et $(\{1,2\})$.

Nous allons chercher une relation de récurrence liant les c_n.

(1) (a) Déterminer c_3.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, quel est le nombre de n-codes où les boutons sont poussés successivement (c'est-à-dire où toutes les parties P_i sont des singletons) ?
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, n pair. Quel est le nombre de n-codes où les boutons sont tous poussés par paires ?
(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, quel est le nombre de n-codes composés de 2 parties ?

(2) (a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq k < n$. Soit P_1 une partie fixée de E_n possédant k éléments. Combien y a-t-il de n-codes commençant par cette partie P_1 ? On exprimera la réponse à l'aide de c_i pour un i bien choisi.
(b) En déduire une expression de c_n en fonction de $(c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})$. On prendra comme convention $c_0 = 1$.
(c) Vérifier que l'expression obtenue fonctionne pour c_2 et c_3.
Donner le nombre de 4-codes et de 5-codes.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(1) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$.

(2) Soit $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=2}^{n-1}(4^{2-k}+5^k 6^{n-k+1}), \qquad (2) \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2}\binom{n}{k-1}.$$

Exercice 4.

(1) Soient a et b deux rationnels vérifiant $a < b$, on note $c = \dfrac{a+b}{2}$. Montrer que c est un nombre rationnel vérifiant $a < c < b$.

(2) En déduire, grâce à un raisonnement par l'absurde, qu'il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

(1) Montrer que : $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$.

(2) Montrer que : $(A\backslash B) \cap C = (A \cap C)\backslash(B \cap C)$.

Consigne : ne pas traiter plus d'une question par une succession d'égalités.