A rendre pour le jeudi 29 Mars 2018

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
6. Montrer que f rélaise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unqiue réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}

2) Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

   En déduire l'ensemble de définition de F.

2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

3) Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégrationpar parties et calculer u_3.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :
   $$\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$
   en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

Exercice Bonus

Soit x un réel strictement positif.

On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots$$

On se propose d'étudier la limite $S(x)$ de $S_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout entier naturel n on pose:

$$f_p(t) = \frac{t^{x+p}}{1+t} \text{ si } 0 < t \leq 1, \ f_p(0) = 0$$

et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel p, l'intégrale $I_p(x)$ existe.
2. Montrer que pour tout t de $[0,1]$:
   $$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

3. Déduire de ce qui précède que l'on a:

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = S_n(x) + R_n(x) \text{ où } R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt$$

4. Démontrer que pour tout entier n :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$$

5. Conclure que l'on a :

$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$$

6. Etude du cas $x = 1/2$. Calculer $S(1/2)$ en
   - utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$
   - utilisant l'égalité $u^2 = u^2 + 1 - 1$
   - utilisant l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

7. En déduire que l'on a (difficile):

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$