

A rendre pour le jeudi 25 Janvier 2017

Exercice 1

On appelle valeur propre d'une matrice A (resp. vecteur propre), le nombre réel λ (resp. le vecteur X non nul) vérifiant $AX = \lambda X$. Cela revient à écrire $AX - \lambda X = 0$ ou $(A - \lambda I)X = 0$.

1. Expliquez pourquoi λ est une valeur propre si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

2. On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Écrivez l'égalité matricielle $(A - \lambda I_3)X = 0$ sous forme de système.

(b) Déterminez les valeurs propres de A (Recherchez quand le système précédent est de Cramer ou non)

3. Les sous-espaces propres de A associés à une valeur propre λ sont noté E_λ . C'est l'ensemble de tous les vecteurs propres X associés à la valeur propre λ . (i.e. les vecteurs solutions de l'équation $(A - \lambda I_3)X = 0$. Donnez les sous espaces propres de A .

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

5. Calculez la matrice $D = P^{-1}AP$. Que constatez vous ?

Exercice 2 (Exercice de type concours)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions, notée α et β , avec $\alpha < \beta$.
5. Vérifier que $-2 < \alpha < -1$ et que $\beta = 0$.
6. A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B : Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $f'(x) = e^x g(x)$. En déduire le tableau de variations de f .

4. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α a été défini dans la partie B. Justifier que $0 < f(\alpha) < \frac{1}{4}$.
5. Donner l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 3

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général sont convergentes. Si c'est le cas, donner la valeur de la somme.

1. $\sum_{n \geq 0} 2^n$
2. $\sum_{n \geq 0} e^{-n}$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{1 + 2^n}{4^{n+1}}$
4. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$

Exercice 4 (D'après HEC)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution, que l'on notera x_n .
(b) Calculer x_1 .
(c) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n) .
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(n)$ et n . En déduire que $x_n \leq n$.
(b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \ln(n) \leq x_n$.
(c) Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}.$$