A rendre pour le jeudi 19 Octobre 2017

Exercice 1

1. Calculer en utilisant un changement de variable $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

2. Soit
$$f : x \to \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$
   (a) Donner le domaine de définition de f D_f.
   (b) f admet-elle une limite en 0 ?
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2
Première partie: Puissance de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que P est inversible et que $P^{-1} = Q$.
2. Calculer $D = P^{-1}MP$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0, M^n = PD^nP^{-1}$.
4. Montrer que $M^n = \begin{pmatrix} (1/3)^n & 0 & 0 \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n & (1/2)^n & 0 \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n & 1 - (1/2)^n & 1 \end{pmatrix}$
5. Vérifier que la formule obtenue à la question précédente est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Deuxième Partie: Probabilités

Soit une urne contenant trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant le protocole suivant.

On tire une boule dans l'urne. On remet alors la boule tirée, mais on retire de l'urne les boules ayant un numéro strictement supérieur à celui de la boule tirée. Et on passe au tirage suivant.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 1, on remet la boule numéro 1 dans l'urne mais on enlève la boule numéro 2 de l'urne. Ainsi, le tirage suivant se fera dans une urne contenant les boules numéro 0 et 1.

Pour $n \geq 0$, on note les événements suivants
A_n : à l'issue du n-ème tirage l'urne contient 3 boules.
B_n : à l'issue du n-ème tirage l'urne contient 2 boules.
C_n : à l?issue du n-ème tirage l'urne contient 1 boule.
On note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On remarque que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $U_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

2. Justifiez que pour tout $n \geq 1$, A_n, B_n, C_n est un système complet d'événements.

3. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geq 0$, $U_{n+1} = MU_n$.

4. En déduire (par récurrence) que $\forall n \geq 0, U_n = M^n U_0$.

5. En déduire que $U_n = \begin{pmatrix} (1/3)^n \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \end{pmatrix}$.

6. On note D_n l'événement "le n-ième tirage est le premier tirage à l'issue du quel il n'y a plus qu'une boule dans l'urne".

   (a) Calculer $P(D_1)$.

   (b) A l'aide de la formule des probas totales, montrer que $P(D_2) = 5/18$.

   (c) A l'aide de la formule des probas totales, montrer que $\forall n \geq 2$, $P(D_n) = 2(1/2)^n - 2(1/3)^n$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on veut montrer le résultat suivant :

$$\forall x \geq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

On défini alors la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (Attention, on a $u_n(0) = 1$). On admettra le théorème de croissances comparées suivant: $\forall x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Enfin, on pose deux fonctions $f_n : x \to e^x - u_n(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et $g_n : x \to e^x - u_n(x)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut $f_n(0)$ et $g_n(0)$?

2. Montrer que $\forall x \geq 0$, $g_n'(x) = g_{n-1}(x)$ et $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.

3. Montrer par récurrence que $\forall x \geq 0$ on a $g_n(x) \geq 0$ et $f_n(x) \leq 0$

4. En déduire que $\forall x \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq u_n \leq e^x$$

5. Quel est la limite de u_n ?