

A rendre pour le jeudi 23 Novembre 2017

Exercice 1

Pour son vélo, Paul possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9.

1. Paul a oublié son code. Combien de combinaisons doit-il essayer *dans le pire des cas* avant de retrouver la bonne ?
2. Même question en supposant que Paul se souvient que son code commence par un 8.
3. Même question en supposant que Paul se souvient que son code se termine par un chiffre pair.
4. Même question en supposant que Paul se souvient que son code ne contient que des chiffres pairs.
5. Même question en supposant que Paul se souvient que son code ne contient que des chiffres impairs.
6. Même question en supposant que Paul se souvient que son code contient au moins un chiffre pair.
7. Même question en supposant que Paul se souvient que son code contient exactement un chiffre pair.

Exercice 2 (Etude de fonction)

On veut étudier la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Considérons d'abord la fonction $g(x) = x - \log x - 1$.
 - (a) Donner le domaine de définition de g .
 - (b) Dresser le tableau de variation de g .
 - (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log x \leq x - 1$.
2.
 - (a) Donner le domaine de définition de f .
 - (b) A l'aide de la question 1c, dresser le tableau de variation de f .
 - (c) Calculer les limites de f en $0^+, 1, +\infty$.

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.

Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.

On considère l'épreuve \mathcal{E} suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1 , sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve \mathcal{E} "

et par B_n l'évènement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve \mathcal{E} "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve \mathcal{E} .
 - (a) La notation PB_1 signifiant: "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1 " (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'événement $\{PB_1\}$.
 - (b) En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de l'épreuve \mathcal{E} .
 - (c) Calculer la probabilité des événements A_1 et B_1 .
2. On répète maintenant l'épreuve \mathcal{E} .
 - (a) Vérifier que : $\forall n \geq 0, P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}$
 - (b) Calculer également $P_{A_n}(B_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
 - (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. En déduire a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - (d) Que vaut la somme $a_n + b_n$? En déduire que $\forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}$
 - (e) Déterminer, en fonction de n , les expressions de a_n et b_n .

Exercice 4

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.

Le joueur adopte la tactique suivante:

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la n -ème partie ($n \geq 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante; s'il gagne à la n -ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité de l'événement A_n : "le joueur gagne la n -ème partie".
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

- (b) En déduire l'expression de p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
2. Dans cette question, on fixe $n \geq 2$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k l'événement: "le joueur gagne une seule fois lors de n -parties et cette victoire a lieu lors de la k -ème partie".
 - (a) Exprimer B_n à l'aide des événements A_k et en déduire $P(B_n)$.
 - (b) Calculer $P(B_1)$.
 - (c) Calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(B_k)$.
 - (d) Soit C_n l'événement: "le joueur gagne une seule fois au cours des n parties". Exprimer C_n à l'aide des événements B_k et en déduire $P(C_n)$.