A rendre pour le jeudi 5 Octobre 2017

Exercice 1
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$

1. Calculer T_n.
2. Développer $(k+1)^3 - k^3$. En déduire l'expression de T_n en fonction de S_n et de n.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Démontrer par un raisonnement direct que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2(n+1)+1)$.
5. Redémontrer le résultat précédent en effectuant une récurrence.
6. Calculer, pour tout entier n, les sommes suivantes :
   $A_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k - 1)$

Exercice 2
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = -1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - 2a_n}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < 0$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{1}{a_n}$. Pourquoi est-ce possible ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$.
4. En introduisant la suite annex adéquate, calculez t_n en fonction de n.
5. En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 3 (Inspiré de EM Lyon 1996)
Soit f ma fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) Montrer que f est paire
   (b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier que $0 \leq \ell \leq \dfrac{1}{2}$ (On donne $f(1/2) < 1/2$).
   (d) Montrer que pour tout réel x: $|f'(x)| \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{u_{n+1}} = \mathrm{f(u_n)}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Pour la question suivante, il faudra utiliser le théorème suivant que l'on appelle théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel $\mathcal{M} > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \mathcal{M}$ alors :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \mathcal{M}|x_1 - x_2|$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \text{puis} \quad |\mathrm{u_n} - \ell| \leq \frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}$$

Exercice 4 (*)

On veut construire un château de cartes. Combien faudra-t-il de cartes pour construire un château de 3 étages ? de n étages ?