A rendre pour le Mercredi 30 Mai 2018

Exercice 1

1. On considère $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x + 2y + z = 0 \right\}$
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par deux vecteurs à déterminer.
   (b) Montrer que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à E.
   (c) Donner alors ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
2. On considère l'application f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y + z$$
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.
   (c) Quel est l'ensemble $f(E)$ (l'image de l'ensemble E par l'application f, revoir le cours sur les applications).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on introduit la suite u définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Ecrire un programme Scilab qui définit dans un premier la fonction f, puis qui calcule les 20 premiers termes de la suite u et qui les trace dans une figure.
2. Tracer le graphe obtenu sur Scilab. Que peut-on conjecturer quand à la limite de la suite ?

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on note $F = Vect(u_1, u_2)$ avec
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient-il au sous-espace vectoriel F ?
2. Déterminer une base de F.
3. On considère l'application $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to F$ tel que
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to xu_1 + yu_2$$
   Montrer que f est une application linéaire. Déterminer son image et son noyau.