A rendre pour le Mercredi 9 Mai 2018

PROBLEME inspiré de HEC 2014

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ.
- La notation exp désigne la fonction exponentielle.
- Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

   (a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
   (c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $N'(x) \leq 0$.
   (d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

   (a) Chercher sur internet le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$
   (b) A l'aide de ce dernier, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (*c'est-à-dire qu'elle a une limite finie en* 0. *Son prolongement est alors la même fonction auquel on rajoute* $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.)
   On note encore f la fonction ainsi prolongée.
   (c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f
   Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
   En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)$

   (a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,dx$. On pose alors pour tout n$\in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.
   (c) En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)$
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

(c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$I_n \geq \int_0^{v_n} g_n(x)\,dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)dx \geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

(d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement, : $\frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leq I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$

(e) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1.$$

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$

(a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

(b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

(c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ est convergente et calculer sa valeur.

(e) A l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}J_n(n)$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

6. On admet que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n (Résultat de deuxième année).

(a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([S_n \leq n])$ et $P([S_n \geq n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

(a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) = -\frac{1}{(n+1)!}\int_n^{n+1} \left(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\right)dt$$

(c) En déduire que la suite $(P([S_n \leq n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(d) Étudier la monotonie de la suite $(P([S_n \geq n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(e) Montrer que les deux suites $(P([S_n \leq n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(P([S_n \leq n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Partie III, Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions : $P\left([X \leq m]\right) \geq \frac{1}{2}$ et $P\left([X \geq m]\right) \geq \frac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

9. (a) Définir une fonction Scilab dont l'en-tête est $functiony = loi_P(k, lambda)$ qui à chaque entier k associe $P(X = k)$ avec X suivant une loi de Poisson de paramètre lambda.

   (b) Écrire un script Scilab calculant et affichant la médiane d'une loi de poisson de paramètre λ.

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

    (a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\left(|X-r|\right) = E\left(X\right) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)\,P\left([X=k]\right)$.

    (b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F\left(k\right) = \sum_{k=0}^{r-1}(r-k)\,P\left([X=k]\right)$.
    En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\left(|X-r|\right) = E\left(X\right) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F\left(k\right) - \frac{1}{2}\right)$

    (c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
    Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E\left(|X-r|\right) - E\left(|X-m|\right)$. Conclure.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E\left(|X-x|\right)$.

    (a) Établir pour tout $x \geq 0$ l'encadrement $0 \leq x\left(1 - F\left(x\right)\right) \leq \int_x^{+\infty} tf\left(t\right)dt$
    En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-F\left(x\right)\right) = 0$.
    En considérant la variable aléatoire $-X$. montrer que $\lim_{x\to-\infty} xF\left(x\right) = 0$.

    (b) Établir pour tout x réel, la relation : $M\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} F\left(t\right)dt + \int_x^{+\infty}\left(1 - F\left(t\right)\right)dt$

    (c) Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M\left(b\right) - M\left(a\right) = \int_a^b \left(2F\left(t\right) - 1\right)dt$.

    (d) On note m une médiane de X. Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.