A rendre pour le Mercredi 9 Mai 2018

Exercice 1 [EML 1996]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
   (c) On pose $Y = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 2 [ECRICOME 2008]

On considère un jeu où le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X_i.
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.
5. Quelle est la probabilité de l'événement $G =$"le joueur gagne la partie"?

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X et déterminer sa fonction de répartition.
2. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une VA. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis reconnaitre la loi suivie par Y.