

A rendre pour le jeudi 12 Avril 2018

### Exercice 1

On considère pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}$$

1. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .  
 (b) Étudier les variations de la fonction  $f_n$ , préciser sa limite en  $+\infty$  et sa valeur en 0.
2. On pose pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ .  
 (a) Montrer que pour tout réel  $t$  strictement positif,  $f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$ . En déduire la convergence de l'intégrale  $I_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ , puis de l'intégrale  $I_n$ .  
 (b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$ .  
 (c) Montrer que pour tout réel  $t$  positif,  $0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n$ .  
 (d) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e}$ .

### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .

1. (a) Étudier la parité de  $f$ .  
 (b) Donner une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  et donner sa valeur.  
 (d) En déduire la convergence et la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ .  
 (a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que :  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \ln 2$ .  
 (b) En déduire la convergence et la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ .

### Exercice 3

1. On pose  $I_0 = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$  et pour tout entier naturel non nul,  $I_n = \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ .  
 (a) Montrer que  $I_0$  est une intégrale convergente égale à  $\frac{1}{e}$ .  
 (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel  $M \geq 0$  :

$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx$$

- (c) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'intégrale  $I_n$  converge.  
(d) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

- (e) Calculer  $I_n$  pour  $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$   
(f) Écrire un script Scilab qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif  $n$ , calcule et affiche la valeur de  $I_n$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{e}{18}(x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera  $Z$ .  
(b) Justifier que la variable  $Z$  admet une espérance puis la calculer.