Exercice 231

$x \mapsto x^2-1$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (polynôme)

$x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fct° $\mathcal{C}^0$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fct° $\mathcal{C}^0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (par croissance comparée)

Donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -1 = f(0)$

Ainsi f est continue à droite en 0.

$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

Exercice 232

On étudie le taux d'accroissement en 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x\ln(x) \cancel{-1} \cancel{+1}}{x} = x - \ln(x).$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty}$

La fonction f n'est pas dérivable en 0. Graphiquement, la courbe admet une <u>tangente verticale</u> au point d'abscisse 0

Exercice 233

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (N'étant pas dérivable en 0, elle n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$

et $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$

Or $2 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 2$
$\Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Donc la fonction f est convexe sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$
et elle est concave sur $]0; \frac{1}{2}[$.

(Point d'inflexion en $x = \frac{1}{2}$)

Pour la limite en $+\infty$, on a

$$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Etude des variations

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$.

On résout $2x - \ln(x) - 1 > 0 \iff 2x - 1 > \ln(x)$

Or la fonction ln est concave, elle est donc en dessous de toutes ses tangentes.

La tangente à la courbe de la fonction ln en $x = \frac{1}{2}$ est

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff y = 2x - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2x - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln(x)$

$$\implies 2x - 1 > \ln(x) \quad \left(\text{car } \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0\right).$$

(C'est bien sur une façon de raisonner astucieuse. On peut tout simplement regarder le signe de f'', en déduire les variation de f' puis en déduire le signe de f').

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ d'ou le tableau de vari.

x	0		$+\infty$
Variations de f.	-1	$\nearrow$	$+\infty$

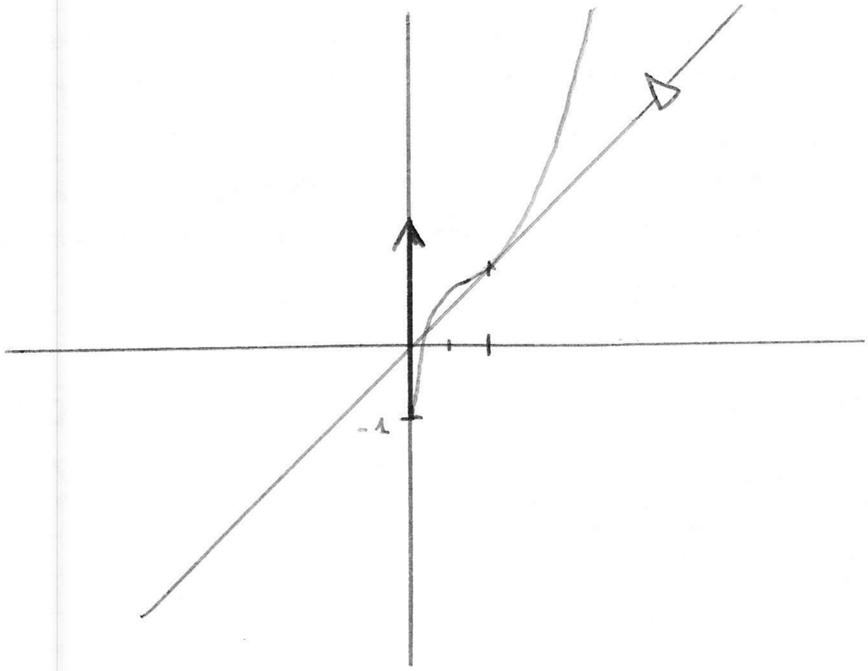
Exercice 234

La tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\iff y = (x-1) + 0$

$\iff \boxed{y = x - 1}$

Exercice 235



Exercice 236

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- La fonction f est strictement croissante
- $f(\mathbb{R}_+^*) =]-1 ; +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $J =]-1 ; +\infty[$

Exercice 237

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f^{-1} \text{ est strictement croissante}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.