Correction Semaine du 30/03 au 05/04

Exercice 224

On note les évènements

A : "Le serveur A a été choisi"

B : "Le serveur B a été choisi"

E : "La transmission s'est ~~mal~~ passé - Erreur".

(A,B) est un système complet d'évènement. Donc d'après la FPT

$$p(E) = p(A) \times p_A(E) + p(B) \times p_B(E)$$
$$= 0,7 \times 0,1 + 0,3 \times 0,05$$
$$= 0,07 + 0,015$$
$$\boxed{p(E) = 0,085}$$

Exercice 225

On veut calculer $p_E(A)$. On utilise la formule de Bayes.

$$p_E(A) = \frac{p(A) \times p_A(E)}{p(E)} = \frac{0,7 \times 0,1}{0,085}$$

$$\boxed{p_E(A) = \frac{70}{85} = \frac{14}{17}}$$

Exercice 226

On note les évènements

A_k "Le serveur A a été choisi au kème jour"

B_k "Le serveur B a été choisi au kème jour"

Alors $(L_1 = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j \cap B_{k+1}\right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{k} B_j \cap A_{k+1}\right)$.

(on choisit k fois le serveur A puis le serveur B ou on choisit k fois le serveur B puis le serveur A

Les choix de serveur étant indépendant, on a

$$p(L_1 = k) = p\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j \cap B_{k+1}\right) + p\left(\bigcap_{j=1}^{k} B_j \cap A_{k+1}\right)$$
$$= \prod_{j=1}^{k} p(A_j) \times p(B_{k+1}) + \prod_{j=1}^{k} p(B_j) \times p(A_{k+1})$$
$$\boxed{= (0,7)^k \times 0,3 + (0,3)^k \times 0,7}$$

Exercice 228

Pour calculer $E(L_1)$, on s'intéresse à la série $\sum_{k\geq 1} k\,p(L_1=k)$

En passant par les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} k\,p(L_1=k) = \sum_{k=1}^{n} k(0,3)^k \times 0,7 + \sum_{k=1}^{n} k(0,7)^k \times 0,3$$

$$= 0,7\times 0,3 \times \sum_{k=1}^{n} k(0,3)^{k-1} + 0,7\times 0,3 \sum_{k=1}^{n} k(0,7)^{k-1}$$

Or les séries $\sum_{k\geq 1} k(0,3)^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1} k(0,7)^{k-1}$ sont des séries géométriques dérivées convergentes (car $|0,3|<1$ et $|0,7|<1$).

Donc $E(L_1)$ existe et

$$E(L_1) = 0,21 \times \frac{1}{(1-0,3)^2} + 0,21 \times \frac{1}{(1-0,7)^2}$$

$$= \frac{0,21}{(0,7)^2} + \frac{0,21}{(0,3)^2}$$

$$= \frac{0,3}{0,7} + \frac{0,7}{0,3} = \frac{3}{7} + \frac{7}{3} = \frac{9}{21} + \frac{49}{21} = \boxed{\frac{58}{21}}$$

Exercice 227

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (0,3)^k(0,7) + (0,7)^k(0,3)$$

$$= 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} (0,3)^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} (0,7)^{k-1}$$

$$= (0,7)\times(0,3) \sum_{k=1}^{+\infty} (0,3)^{k-1} + 0,3\times 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} (0,7)^{k-1}$$

$$= 0,7\times 0,3 \sum_{k=0}^{+\infty} (0,3)^k + 0,3\times 0,7 \sum_{k=0}^{+\infty} (0,7)^k$$

$$= \frac{0,7\times 0,3}{1-0,3} + \frac{0,3\times 0,7}{1-0,7}$$

$$= 0,3 + 0,7$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1=k) = 1}$$

Exercice 229

On répète une expérience de Bernoulli ("choisir le serveur A") de façon indépendante.

N_n compte le nombre de succès : $N_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0{,}7)$

$E(N_n) = 0{,}7\,n$

$V(N_n) = 0{,}21\,n$

T_1 représente l'apparition du premier succès : $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(0{,}7)$

$E(T_1) = \dfrac{1}{0{,}7} = \dfrac{10}{7}$

$V(T_1) = \dfrac{0{,}3}{(0{,}7)^2} = \dfrac{3}{49}$

Exercice 230

On peut montrer cette relation par la même méthode que dans l'exercice 20 (Feuille de TD 20) ou alors par dénombrement :

Pour obtenir le 2ème succès à la $k^{ème}$ expérience il faut :

→ Tirer 2 fois le serveur A (dont 1 fois en k ème position)

→ $k-2$ fois le serveur B

Par exemple : BBABB ... A

$k^{ème}$ place

La probabilité d'obtenir l'exemple ci-dessus est $(0{,}7)^2(0{,}3)^{k-2}$

Or il y a $n-1$ possibilités de placer le premier serveur A :

ABBB ... A
BABB ... A
BBAB ... A

Donc $\boxed{P(T_2 = k) = (k-1)(0{,}7)^2(0{,}3)^{k-2}}$