# Correction Calculs du 5/04 au 11/04

**Exercice 224 (Intégrales)**

1. La fonction $t \to \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[0,1]$. (notamment car $1+t^2>0$). On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt &= \int_0^1 \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}dt\\ &= \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1\\ &\boxed{= \sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{e^t}{2+e^t}$ est continue sur $[1,2]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^t}{2+e^t}dt &= \left[\ln(2+e^t)\right]_1^2\\ &\boxed{= \ln(2+e^2)-\ln(2+e)}\end{aligned}$$

3. Cette question est un piège, il n'y a pas de primitive pour cette intégrale. On va donc procéder par intégration par parties. La fonction $x \to xe^{2x}$ est continue sur $[0,2]$. On pose $\begin{array}{ll} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{2x} & v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}$.

Les fonctions $u$ et $v$ définies ainsi sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x}dx\\ &= e^4 - 0 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^2\\ &= e^4 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}\\ &\boxed{= \frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

**Exercice 225 (Intégrales)**

1. La fonction $t \to \dfrac{\ln^n(t)}{t}$ est continue sur $[1,e]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln^n(t)}{t}dt &= \left[\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(t)\right]_1^e\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\ln^{n+1}(e)-\ln^{n+1}(1)\right)\\ &\boxed{= \frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{e^t}{\sqrt{2+e^t}}$ est continue sur $[0,\ln(2)]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{\sqrt{2+e^t}}dt &= \left[2\sqrt{2+e^t}\right]_0^{\ln(2)}\\ &= 2\sqrt{2+2}-2\sqrt{2+1}\\ &\boxed{= 4-2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3. La fonction $x \to 3x^2 e^{x^3}$ est continue sur $[0,2]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2)e^{x^3}dx &= \left[e^{x^3}\right]_0^2 \\ &\boxed{= e^8 - 1}\end{aligned}$$

**Exercice 226 (Intégration par parties)**

1. La fonction $t \to te^{-t}$ est continue sur $[0,1]$. On pose $\begin{array}{cc} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{array}$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 te^{-t}dt &= [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt \\ &= -e^{-1} - (-0) + [-e^{-t}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} + -e^{-1} + 1 \\ &\boxed{= 1 - \frac{2}{e}}\end{aligned}$$

2. Soit $x > 0$, la fonction $t \to \ln(t)$ est continue sur $[1,x]$. On pose $\begin{array}{cc} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)dt &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x dt \\ &= x\ln(x) - 0 - (x-1) \\ &\boxed{= x\ln(x) - x + 1}\end{aligned}$$

**Exercice 227 (Intégration par parties)**

1. La fonction $t \to (t^2+1)e^t$ est continue sur $[0,1]$. On pose $\begin{array}{cc} u(t) = t^2+1 & u'(t) = 2t \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{array}$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc

$$\int_0^1 (t^2+1)e^t dt = [(t^2+1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt$$

Afin de calculer la deuxième intégrale, on procède à une deuxième intégration par partie. On pose $\begin{array}{cc} u(t) = 2t & u'(t) = 2 \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{array}$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 2te^t dt &= [2te^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt \\ &= 2e - 0 - [2e^t]_0^1 \\ &= 2e - 2e + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\textstyle\int_0^1 (t^2+1)e^t dt = 2e - 1 - 2 = 2e - 3}$$

2. Soit $x > 0$, la fonction $t \to \ln^2(t)$ est continue sur $[1,x]$. On pose $\begin{array}{cc} u(t) = \ln^2(t) & u'(t) = 2\frac{\ln(t)}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}$.

Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln^2(t)dt &= [t\ln^2(t)]_1^x - \int_1^x 2\ln(t)dt \\ &= x\ln^2(x) - 0 - (x\ln(x) - x + 1) \\ &\boxed{= x\ln^2(x) - x\ln(x) + x - 1}\end{aligned}$$

**Exercice 228 (Intégration par changement de variable)**

1. La fonction $t \to \frac{(\ln(t))^2}{t}$ est continue sur $[e, e^2]$. On pose alors le changement de variable $u = \ln(t)$. On a alors

$$du = \frac{1}{t}dt, \quad t = e \rightsquigarrow u = 1, \quad t = e^2 \rightsquigarrow u = 2$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{t}(\ln t)^2 dt &= \int_1^2 u^2 du \\ &= \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{7}{3}}\end{aligned}$$

2. La fonction $t \to \sqrt{2+t}$ est continue sur $[0, 1]$. On pose alors le changement de variable $t = u^2 - 2 \iff u = \sqrt{t+2}$. On a alors

$$dt = 2udu, \quad t = 0 \rightsquigarrow u = \sqrt{2}, \quad t = 1 \rightsquigarrow u = \sqrt{3}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{2+t}\ dt &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u \times 2udu \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u^2 du \\ &= 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &\boxed{= \frac{2}{3}\left((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{2})^3\right)}\end{aligned}$$

**Exercice 229 (Intégration par changement de variable)**

1. La fonction $t \to \frac{t^2}{t^3+8}$ est continue sur $[0, 2]$. On pose alors le changement de variable $u = t^3 + 8$. On a alors

$$du = 3t^2 dt, \quad t = 0 \rightsquigarrow u = 8, \quad t = 2 \rightsquigarrow u = 16$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt &= \int_8^{16} \frac{1}{3u}du \\ &= \left[\frac{\ln(u)}{3}\right]_8^{16} \\ &= \frac{\ln(16)}{3} - \frac{\ln(8)}{3} \\ &\boxed{= \frac{\ln(2)}{3}}\end{aligned}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1/2, 1]$. On pose alors le changement de variable $u = \dfrac{t}{t+1}$.
   On a alors
$$du = \frac{t+1-t}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{(t+1)^2}dt, \quad t = 1/2 \rightsquigarrow u = \frac{1}{3}, \quad t = 1 \rightsquigarrow u = \frac{1}{2}$$
   On a donc
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t(t+1)}\, dt &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(t+1)}{t} \times \frac{1}{(t+1)^2}\, dt \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u} du \\ &= [\ln(u)]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln(1/2) - \ln(1/3) \\ &\boxed{= \ln(3) - \ln(2)}\end{aligned}$$

**Exercice 230 (Sommes de Riemann)**

1. On a
$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \frac{k}{1+\dfrac{k^2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$
   On reconnait alors une somme de Riemann, en posant $f : x \to \dfrac{x}{1+x^2}$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ donc la suite $(u_n)$ est convergente et
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &\boxed{= \frac{\ln(2)}{2}}\end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned}v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2(1+2k/n)}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2\dfrac{k}{n}}}\end{aligned}$$

On reconnait alors une somme de Riemann, en posant $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc la suite $(v_n)$ est convergente et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx \\ &= \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 \\ &\boxed{= \sqrt{3}-1}\end{aligned}$$