Correction Calculs du 22/03 au 28/03

Exercice 217 (Inéquations)
On cherche à factoriser le polynôme x^3+x^2-2. On remarque que 1 est une racine évidente de ce polynôme. On a donc la factorisation (en utilisant par exemple la division euclidienne)

$$x^3+x^2-2=0 \iff (x-1)(x^2+2x+2)=0$$

On détermine alors les racines du polynôme x^2+2x+2 en calculant son discriminant $\Delta=4-4\times 2=-4<0$ Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2+2x+2>0$$

Donc le signe de x^3+x^2-2 est le même que $x-1$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3+x^2-2>0$ est donc

$$\boxed{\mathcal{S}=]1;+\infty[.}$$

Pour cette inéquation, on va procéder de manière directe :

$$\begin{aligned} e^{2x}-4<0 &\iff e^{2x}<4 \\ &\iff 2x<\ln(4) \\ &\iff x<\frac{1}{2}\ln(4) \end{aligned}$$

1. $\boxed{\text{Donc } \mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\ln(4)\right[.}$

Exercice 218 (Récurrence)
Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x+\dfrac{1}{x}\in\mathbb{Z}$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

- **Initialisation :** On a $x+\dfrac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que les propositions $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ sont vraies pour un certain rang $n\geq 1$. On a

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^{n+1}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n+1}}$$

Donc

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Or $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\in\mathbb{Z}$, $\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)\in\mathbb{Z}$ et $\left(x^{n-1}+\dfrac{1}{x^{n-1}}\right)\in\mathbb{Z}$. Or un produit et une somme de nombre entier reste un nombre entier donc

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\in\mathbb{Z}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n\geq 0,\ x^{n+1}+\dfrac{1}{x^{n+1}}\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 219 (Probabilité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise dispose d'un lot de n feuilles numérotées $1, 2, \ldots, n$. Elle photocopie ces n feuilles et veut agrafer chaque copie avec son original. Suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les n originaux et les n copies. L'entreprise place donc les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est chargé du travail suivant : Elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon elle les remet dans la boite et recommence. On note A_n l'évènement "A l'issue de la première pioche, le deux feuilles piochées ne sont pas agrafées".

Pour tirer une copie et son original il faut tirer une feuille quelconque puis tirer la copie ou l'original correspondante (il y a une possibilité sur $2n-1$ feuilles restantes). Ainsi $P(\bar{A_n}) = 1 \times \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{1}{2n-1}$ donc

$$\boxed{P(A_n) = \frac{2n-2}{2n-1}.}$$

Exercice 220 (Limites)

1. On calcule cette limite en factorisant par x^3,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - \ln(x) + 2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{2}{x^3}\right)$$

   Or, par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$$

   On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3 - \ln(x) + 2 = +\infty.}$$

2. En utilisant la quantité conjuguée, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}+1 \\
&\boxed{= 2}
\end{aligned}$$

Exercice 221 (Système)
On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(1-\lambda)x+2y-z&=&0\\-2x-(3+\lambda)y+3z&=&0\\x+y-(2+\lambda)z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y-(2+\lambda)z&=&0\\-2x-(3+\lambda)y+3z&=&0\\(1-\lambda)x+2y-z&=&0\end{array}\right. \text{Ł}_1\leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll}x+y-(2+\lambda)z&=&0&\\-(1+\lambda)y-(1+2\lambda)z&=&0&2L_1+L_2\to L_2\\-(1+\lambda)y+(\lambda^2+\lambda-1)z&=&0&(1-\lambda)L_1-L_3\to L_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll}x+y-(2+\lambda)z&=&0&\\-(1+\lambda)y-(1+2\lambda)z&=&0&\\(\lambda^2+3\lambda)z&=&0&L_3-L_2\to L_3\end{array}\right.$$

Ce système est de Cramer si et seulement si les pivots sont non nuls. Or les pivots sont nuls si et seulement si

$$\lambda^2+3\lambda=0 \iff \lambda=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=-3$$

et si

$$-(1+\lambda)=0 \iff \lambda=-1$$

Il y a donc 3 cas possibles.

1. Si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0\}$: Dans ce cas, le système est de Cramer et il n'a qu'une unique solution qui est forcément $(0,0,0)$.
2. Si $\lambda=0$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}x+y-2z&=&0\\-y-z&=&0\\0&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&3z\\y&=&-z\\0&=&0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}3z\\-z\\z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

3. Si $\lambda=-3$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}x+y+z&=&0\\2y+5z&=&0\\0&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{3}{2}z\\y&=&-\frac{5}{2}z\\0&=&0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}3z\\-5z\\2z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\right)}$$

4. Si $\lambda=-1$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}x+y+z&=&0\\z&=&0\\-2z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&-y\\z&=&0\\z&=&0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 222 (Intégrales)

1. La fonction $x \to \dfrac{\ln(x)^2}{x}$ est continue sur $[1,2]$. L'intégrale existe donc et

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)^2}{x}dx = \left[\frac{1}{3}\ln(x)^3\right]_1^2$$
$$\boxed{= \frac{\ln(2)^3}{3}}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{t^3}{t^4+1}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe et

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^4+1}dt = \left[\frac{1}{3}\ln(t^4+1)\right]_1^4$$
$$\boxed{= \frac{\ln(2)}{3}}$$

3. La fonction $t \to t^7 e^{t^4}$ est continue sur [01]. L'intégrale existe mais nous ne connaissons pas de primitives de cette fonction. Nous procédons alors à une intégration par parties avec $\begin{array}{ll} u(t) = t^4 & v'(t) = t^3 e^{t^4} \\ u'(t) = 4t^3 & v(t) = \dfrac{e^{t^4}}{4} \end{array}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^7 e^{t^4} dt &= \left[\frac{t^4 e^{t^4}}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 t^3 e^{t^4} dt \\ &= \frac{e}{4} - 0 - \left[\frac{e^{t^4}}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Exercice 223 (Série)

1. En passant par les sommes partielles, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{5^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{k!} - 1$$

Or la série $\sum_{k\geq 0} \dfrac{5^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente donc la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{5^k}{k!}$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} = e^5 - 1$$

2. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k+1} = \dfrac{1}{16} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$. Or la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ est convergente car $\dfrac{1}{4} < 1$.

Donc la série $\sum_{k\geq 0} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$ est une série géométrique dérivée convergente et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} &= \frac{1}{4^2}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{4^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4^2}\times\frac{4^2}{3^2} \\
&\boxed{= \frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

3. On passe par les sommes partielles, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{2^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\frac{2^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)\frac{2^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\frac{2^k}{(k-1)!} + 0 + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{2^{j+1}}{j!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{(k-2)!} + 0 + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{2^{j+1}}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{2^{j+2}}{j!} + 0 + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{2^{j+1}}{j!} \\
&= 4\sum_{j=0}^{n-2} \frac{2^{j}}{j!} + 2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{2^{j}}{j!}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente donc la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2\frac{2^k}{k!}$ est convergente donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\frac{2^k}{k!} = 4e^2 + 2e^2 = 6e^2}$$