

Correction Calculs du 15/03 au 21/03

Exercice 210 (Inéquations)

On cherche à faire un tableau de signe avec le premier polynôme et donc à factoriser $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$. On remarque que 1 est une racine évidente de ce polynôme. En posant par exemple la division euclidienne, on a

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(x^2 + 4x + 1)$$

On cherche alors le discriminant du polynôme $x^2 + 4x + 1$, $\Delta = 16 - 4 = 12$. Ce polynôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$$

Or $\sqrt{3} < 2$ donc $x_1 < x_2 < 1$. On en déduit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	$-2 + \sqrt{3}$	1	$+\infty$	
Signes de $x - 1$		-	-	-	0	+
Signe de $x^2 + 4x + 1$		+	0	-	0	+
Signe de $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$		-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \leq 0$ est donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}; 1].$$

Pour cette inéquation, on va également chercher à faire un tableau de signe en factorisant l'expression. On transforme alors l'expression $\ln(x)^2 + 3\ln(x) - 4$ en un polynôme en posant $X = \ln(x)$. Et l'on étudie $X^2 + 3X - 4$. Le discriminant de ce polynôme est alors $\Delta = 25$. Ce polynôme possède donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

On a donc la factorisation suivante : $X^2 + 3X - 4 = (X + 4)(X - 1)$. Ainsi,

$$\ln(x)^2 + 3\ln(x) - 4 < 0 \iff (\ln(x) + 4)(\ln(x) - 1) < 0$$

On obtient alors le tableau de signe suivant

x	0	e^{-4}	e	$+\infty$
Signes de $\ln(x) + 4$		-	0	+
Signe de $\ln(x) - 1$		-	-	0
1. Signe de $\ln(x)^2 + 3\ln(x) - 4$		+	0	-

$$\text{Donc } \mathcal{S} =]e^{-4}; e[.$$

Exercice 211 (Récurrence)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n)$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \{u_n \in [1, e]\}.$$

- **Initialisation** : On a $u_0 = e$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n , est vraie pour un certain rang $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq e &\implies 0 \leq \ln(u_n) \leq 1 \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq \frac{1}{2} \\ &\implies 1 \leq 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq \frac{3}{2} \\ &\implies 1 \leq u_{n+1} \leq e \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [1, e]$.

La fonction $f : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \ln(x)$ est dérivable sur $[1, e]$ et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2x}$. On a donc,

$$\forall x \in [1, e], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Or comme $1 \in [1, e]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, e]$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$, c'est à dire

$$\boxed{|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|}.$$

On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} (e - 1) \right\}.$$

- **Initialisation** : On a $u_0 = e$ donc $|u_0 - 1| = (e - 1)$ et \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n , est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. Or d'après la question précédente, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$ et par hypothèse de récurrence, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} (e - 1)$ donc

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (e - 1)$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \geq 0$, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} (e - 1)$.

Exercice 212 (Sommes)

1. L'égalité $\sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{k=1}^n a_k$ est fautive. On aurait à la place

$$\sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \sum_{k=1}^n \alpha + \sum_{k=1}^n a_k = n\alpha + \sum_{k=1}^n a_k$$

2. La formule $\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$ est vraie.

3. La formule $\sum_{k=1}^n a_k + b_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{j=1}^n b_j$ est vraie.
4. La formule $\sum_{k=1}^n (a_k)^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^\alpha$ est fausse.

Exercice 213 (Probabilité)

"Obtenir pile en lançant une pièce" est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p . On répète cette épreuve de manière identique et indépendante n fois. La variable aléatoire X_n compte alors le nombre de succès obtenus. X_n suit donc une loi binomiale de paramètre n et p . Ainsi

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad E(X_n) = np \quad \text{et} \quad V(X_n) = np(1-p)$$

Exercice 214 (Limites)

1. On factorise en haut et en bas par e^x (qui semble croître le plus vite). On a donc

$$\frac{e^x + x + \ln(x)}{e^x - 1} = \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{\ln(x)}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{e^x} + \frac{\ln(x)}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

Or, par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x} = 0$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x + \ln(x)}{e^x - 1} = 1.$$

2. Par changement de variable $X = e^x$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \ln(2)} \frac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x - 2} = \lim_{X \rightarrow 2} \frac{X^2 - X - 2}{X - 2}$$

On cherche alors les racines du polynôme $X^2 - X - 2$. On sait que 2 est une racine ainsi que -1 (on peut le vérifier par le calcul ou faire le discriminant). On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \ln(2)} \frac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x - 2} &= \lim_{X \rightarrow 2} \frac{(X - 2)(X + 1)}{X - 2} \\ &= \lim_{X \rightarrow 2} X + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 215 (Système)

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (3 - \lambda)x + y = 0 \\ 3x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + (1 - \lambda)y = 0 \\ (3 - \lambda)x + y = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} 3x + (1 - \lambda)y = 0 \\ 3y - (3 - \lambda)(1 - \lambda)y = 0 \end{cases} & 3L_2 - (3 - \lambda)L_1 \rightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} 3x + (1 - \lambda)y = 0 \\ (4\lambda - \lambda^2)y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + (1 - \lambda)y = 0 \\ \lambda(4 - \lambda)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer si et seulement si les pivots sont non nuls. Or les pivots sont nuls si et seulement si

$$\lambda(4 - \lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4$$

Il y a donc 3 cas possibles.

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$: Dans ce cas, le système est de Cramer et il n'a qu'une unique solution qui est forcément $(0, 0)$.
2. Si $\lambda = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/3y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3. Si $\lambda = 4$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 216 (Intégrales)

1. La fonction $x \rightarrow -\frac{3}{x}$ est continue sur $[1, e]$. L'intégrale existe donc et

$$\begin{aligned} \int_1^e -\frac{3}{x} dx &= [-3 \ln(|x|)]_1^e \\ &= -3 \ln(e) + 3 \ln(1) \\ &= \boxed{-3} \end{aligned}$$

2. La fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1, 4]$ donc l'intégrale existe et

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{\ln(x)}{x} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln(x)^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \ln(4)^2 - \frac{1}{2} \ln(1)^2 \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln(2))^2 \\ &= \boxed{2 \ln(2)^2} \end{aligned}$$

3. La fonction $x \rightarrow \frac{2x}{x^2 - 1}$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et cette fonction est impaire. Donc l'intégrale existe et

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x}{x^2 - 1} dx = 0.$$