Correction Calculs du 8/03 au 14/03

Exercice 204

1. On passe par les sommes partielles

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k &= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= \frac{1-2^{n+1}}{-1} \\ &= 2^{n+1}-1\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}-1=+\infty$.

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{n\geq 0} 2^n \text{ est divergente.}}$$

2. On passe par les sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2}=+\infty$.

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{n\geq 0} n \text{ est divergente.}}$$

3. On passe par les sommes partielles

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1-\frac{1}{e^{n+1}}}{1-\frac{1}{e}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{e-1}{e}} \\ &= \frac{e}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n+1}}=0$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}}$$

4. On passe par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1+2^k}{4^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{2^k}{4^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4} \times \frac{2^k}{4^k} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1+2^n}{4^{n+1}}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}}$$

Exercice 205 (Calcul direct)

1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}$$

2. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2}$$

On ne reconnait pas tout de suite une série exponentielle. On passe par les sommes partielles pour $N \geq k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{N} \frac{\binom{n}{k}}{n!} &= \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

Or $k!$ ne dépend pas de n et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{N} \frac{\binom{n}{k}}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{N-k} \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

en posant le changement d'indice $n' = n - k$.

On sait que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente. On a donc la série $\sum_{n\geqslant k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$ est une série convergente et

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{e}{k!}.}$$

Exercice 206 (Calcul direct)

1. On passe par les sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en appliquant un changement d'indice

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^{k-1}}{k!} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k}{k!} \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{3^k}{k!} - 1\right)\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{e^3 - 1}{3}.}$$

2. On passe par les sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en appliquant un changement d'indice

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+2)!} &= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(-1)^{k-2}}{k!} \\ &= (-1)^{-2}\sum_{k=2}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$$

3. On passe par les sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en appliquant un changement d'indice

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!} &= \sum_{n=k}^{N} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{a^k b^{n-k}}{n!} \\ &= \frac{a^k}{k!} \sum_{n=k}^{N} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{a^k}{k!} \sum_{n=0}^{N-k} \frac{b^n}{n!}\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente. La série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!} = \frac{a^k}{k!} e^b.}$$

Exercice 207 (Telescopage)

1. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k)\\ &= \ln(1) - \ln(n)\\ &= -\ln(n)\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ n'est pas convergente.}}$$

2. On a bien $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n-1)} - \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$. On passe alors par les sommes partielles

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\\ &= 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1}$$

Exercice 208 (Somme dérivée)

1. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{6^k} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{6^{k-2}}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{6^{n-2}}$ est convergente car $\frac{1}{6} < 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{6^n} = \frac{1}{36} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^3} = \frac{6}{125}.}$$

2. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{4^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k+k+1}{4^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{4^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \\
&= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4^{k-1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} - 1
\end{aligned}$$

Or les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{4^{n-1}}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}$ sont convergentes car $\frac{1}{4} < 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{4^n}$ est donc convergente et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{4^n} &= \frac{1}{16} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 \\
&= \frac{4^3}{4^2 \times 3^3} + \frac{16}{4 \times 9} + \frac{4}{3} - 1 \\
&= \frac{4}{27} + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 \\
&= \frac{4+12+36-27}{27} \\
&\boxed{= \frac{25}{27}}
\end{aligned}$$

3. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} k \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série convergente car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-(-1/2)\right)^2} = \frac{2}{9}.}$$

Exercice 209 (Somme dérivée)

1. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$ est convergente donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = e + 2e + e = 4e.}$$

2. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, par changement d'indice,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{5^k} &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)k}{5^{k-1}} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{5^{k-2}}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n(n-1)}{5^{n-2}}$ est une série géométrique dérivée convergente car $\frac{1}{5} \leq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{5^n}$ est une série convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{5^n} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{25}{84}$

3. On passe par les sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(-1)^k x^{k-2} &= (-1)^2 \sum_{k=2}^{n} k(-1)^{k-2} x^{k-2} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(-x)^{k-2} \\
&= (-x)^{-1} \sum_{k=2}^{n} k(-x)^{k-1} \\
&= -\frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n} k(-x)^{k-1} - 1 \times (-x)^0\right) \\
&= -\frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n} k(-x)^{k-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} n(-x)^{n-1}$ est convergente car $x \in]0,1[$ donc la série $\sum_{n\geq 2} n(-1)^n x^{n-2}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(-1)^n x^{n-2} = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1\right).}$$