Correction Calculs du 22/02 au 07/03

Exercice 197

1. Comme $t-2=0 \iff t=2$, la fonction $t \to \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. Sur ces intervalles, les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=\ln(|t-2|)+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
2. Comme $t^2=0 \iff t=0$, la fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Sur ces intervalles, les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=-\frac{1}{t}+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
3. Comme $1+t^2>0$, la fonction $t \to \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=\sqrt{1+t^2}+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
On reconnait la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u=t^2+1$

Exercice 198

1. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t\to t$ est différente de 0 pour $t\in\mathbb{R}_+^*$. Par composée, la fonction $t\to\dfrac{(\ln(t))^3}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=\frac{1}{4}(\ln(t))^4+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
On reconnait la forme $u'u^3$ avec $u=\ln(t)$
2. Comme $e^{2t}+2\neq 0$, la fonction $t\to\dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+2)+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u=e^{2t}+2$
3. La fonction racine est continue sur $\mathbb{R}_+$ et est différente de 0 sur $\mathbb{R}_+*$, la fonction $t\to\dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Les primitives de cette fonction sont de la forme
$$\boxed{F(t)=e^{\sqrt{t}}+K, \quad K\in\mathbb{R}.}$$
On reconnait la forme $u'e^u$ avec $u=\sqrt{t}$

Exercice 199

1. La fonction $t \to t^2+3t$ est continue sur $[0,1]$. On calcule donc

$$\int_0^1 (t^2+3t)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{2} = \boxed{= \frac{11}{6}}$$

2. La fonction $t \to e^{2x-1}$ est continue sur $[0,1]$. On calcule donc

$$\int_0^1 e^{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 \boxed{= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1}}$$

On reconnait la forme $u'e^u$ avec $u = 2t-1$

3. Pour tout $u \in [e, e^2]$, $u\ln(u) \neq 0$. La fonction $u \to \dfrac{1}{u\ln(u)}$ est continue sur $[e, e^2]$. On calcule donc

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{u\ln(u)}du = [\ln(|\ln(u)|)]_e^{e^2} = \ln(|\ln(e^2)|) - \ln(|\ln(e)|) \boxed{= \ln(2)}$$

On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln(t)$

Exercice 200

1. La fonction $t \to \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0,1]$ car $t-2 \neq 0$ pour $t \in [0;1]$. On calcule donc

$$\int_0^1 \frac{1}{t-2}dt = [\ln(|t-2|)]_0^1 = \ln(|1-2|) - \ln(|0-2|) \boxed{= -\ln(2)}$$

On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = t-2$

2. La fonction $z \to (2z-1)e^{z^2-z}$ est continue sur $[1,4]$ en tant que composée et produit de fonctions continues. On calcule donc

$$\int_1^4 (2z-1)e^{z^2-z}dz = \left[e^{z^2-z}\right]_1^4 = e^{16-4} - e^{1-1} \boxed{= e^{12}-1}$$

On reconnait la forme $u'e^u$ avec $u = z^2-z$

3. Pour tout $t \in [0,2]$, $e^t + 3 > 0$. La fonction $t \to \dfrac{3e^t}{e^t+3}$ est continue sur $[0,2]$ en tant que quotient de fonctions continues. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{3e^t}{e^t+3}dt &= \left[3\ln(e^t+3)\right]_0^2 \\ &\boxed{= 3\ln(e^2+3) - 3\ln(4)}\end{aligned}$$

On reconnait la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = e^t + 3$

Exercice 201

1. La fonction ln est continue et est strictement positive sur $[e, 2e]$. Donc la fonction $t \to \sqrt{\ln(t)}$ est continue et non nulle sur $[e, 2e]$. De même la fonction $t \to t$ est non nulle sur $[e, 2e]$. Donc la fonction $t \to \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $[e, 2e]$. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_e^{2e} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}dt &= \left[2\sqrt{\ln(t)}\right]_e^{2e} \\ &= 2\sqrt{\ln(2e)} - 2\sqrt{\ln(e)} \\ &\boxed{= 2\sqrt{\ln(2e)} - 2}\end{aligned}$$

On reconnait la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = \ln(t)$

2. La fonction racine est continue sur $[0,4]$. Donc la fonction $y \to \sqrt{y}(y - 2\sqrt{y})$ est continue sur $[0,4]$. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{y}(y-2\sqrt{y})dy &= \int_0^4 \sqrt{y}ydy - \int_0^4 2ydy \\ &= \int_0^4 y^{3/2}dy - 2\int_0^4 ydy \\ &= \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 - [y^2]_0^4 \\ &= \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 0 - (16-0) \\ &= \frac{2}{5}\times 2^5 - 16 \\ &\boxed{= \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}}\end{aligned}$$

3. La fonction $x \to x+1$ est continue et non nulle sur $[0,1]$. Donc la fonction $x \to \dfrac{x}{x+1}$ est continue sur $[0,1]$. On ne reconnait pas de formule de primitives ici :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 1dx - [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= 1 - (\ln(2) - \ln(1)) \\ &\boxed{= 1 - \ln(2)}\end{aligned}$$

Exercice 202

1. La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1,2]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2\\ &= -\frac{1}{2} - (-1)\\ &\boxed{= \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

2. Les fonctions ln et $x \to x$ sont continues et non nulles sur $[e,3]$. La fonction $x \to \frac{dx}{x\ln(x)}$ est continue sur $[e,3]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\int_e^3 \frac{dx}{x\ln(x)} &= [\ln(\ln(x))]_e^3\\ &= \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(e))\\ &\boxed{= \ln(\ln(3))}\end{aligned}$$

On reconnait la forme $\frac{u'}{u}$ *avec* $u = \ln(t)$

3. La fonction racine est continue et non nulle sur $[1,2]$. La fonction $x \to \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $[1,2]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx &= \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^2\\ &= e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{1}}\\ &\boxed{= e^{\sqrt{2}} - e}\end{aligned}$$

On reconnait la forme $u'e^u$ *avec* $u = \sqrt{t}$

Exercice 203

1. La fonction $z \to z^4e^{-z^5}$ est continue sur $[0,2]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\int_0^2 z^4e^{-z^5}dz &= \left[-\frac{1}{5}e^{-z^5}\right]_0^2\\ &= -\frac{1}{5}e^{-2^5} + \frac{1}{5}e^0\\ &\boxed{= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-32}}\end{aligned}$$

On reconnait la forme $u'e^u$ *avec* $u = -z^5$

2. La fonction $t \to t^2 + 3t$ est continue sur $[0,1]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^2+3t)dt &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 0\\ &\boxed{= \frac{11}{6}}\end{aligned}$$

3. Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{2t} + 1 \neq 0$. La fonction $t \to \dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+1}$ est continue sur $[0, \ln(2)/2]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+1)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln(e^{2\frac{\ln(2)}{2}}+1) - \frac{1}{2}\ln(e^0+1) \\
&\boxed{= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2)}
\end{aligned}$$

On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ *avec* $u = e^{2t} + 1$