# Correction Calculs du 15/02 au 21/02

**Exercice 190 (Dérivées)**

1. La fonction $f : x \to \ln(x) + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :
$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$
Or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > 0$ et $e^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante. De plus
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
Ainsi $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. La fonction $f$ est continue sur $]0; +\infty[$ (car dérivable) donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$. On a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signes de $f'(x)$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation, la fonction $f$ est strictement positive sur $]\alpha; +\infty[$. Donc
$$\boxed{\mathcal{S} = ]\alpha; +\infty[.}$$

2. On résout l'inéquation $e^x \ln(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \to e^x$ est strictement positive donc
$$\begin{aligned} e^x \ln(x) < 0 &\iff \ln(x) < 0 \\ &\iff x < 1 \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\mathcal{S} = ]0, 1[.}$$

**Exercice 191 (Récurrence)**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. On va montrer par récurrence les propositions
$$\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ est bien définie et } u_n > 1\}.$$

- **Initialisation :** Par définition $u_0 = 2 > 1$ et $u_1 = 3 > 1$ donc les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
- **Hérédité :** On suppose que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies pour un certain rang $n \geq 0$. On sait alors $u_n > 1$ et $u_{n+1} > 1$. Donc $\sqrt{u_n}$ existe et $\sqrt{u_{n+1}}$ existe donc $u_{n+2}$ est bien définie. De plus,
$$\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} > 2 > 1.$$
Donc $u_{n+2} > 1$. La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ u_n \text{ est bien définie et } u_n > 1}$.

**Exercice 192 (Sommes )**

1. On calcule à l'aide du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}+1\right)^n \\ &\boxed{= \left(\frac{3}{2}\right)^n}\end{aligned}$$

2. Pour ce produit, on ne peut pas réellement le calculer. On peut le simplifier en utilisant les factorielles.

$$\boxed{\prod_{k=3}^{n} k = \frac{n!}{2!} = A_2^n}$$

3. On calcule en utilisant la remarque.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kk! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)k! - k! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - k!\end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme télescopique, nous avons donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1}$$

**Exercice 193 (Probabilité)**

On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables. Un joueur $A$ effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par $A$ avant de tirer une boule blanche.

Tout d'abord, on remarque que $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. Notons les évènements $N_i$ " je tire une boule noire au ième tirage et $B_i$ : "je tire une boule blanche au ième tirage". On a alors,

$$\boxed{P(X=0) = P(B_1) = \frac{1}{2}}$$

On a également

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(N_1 \cap B_2) \\ &= P(N_1)P_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(N_1 \cap N_2) \\ &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. On a déterminé la loi de la variable aléatoire $X$. Donc

$$\boxed{E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{2}{3}}$$

Ensuite, d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) \\ &= \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et d'après la formule de Koenig Huygens, on obtient,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1 - \frac{4}{9} \\ &\boxed{= \frac{5}{9}} \end{aligned}$$

**Exercice 194 (Limites)**

1. On a pour $x < 0$,

$$\ln(x^2)e^x = \frac{\ln(x^2)}{x^2} \times x^2 e^x$$

Or par croissances comparées,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2)e^x = 0.}$$

2. Le polynôme $X^3 - 2X + 1$ admet 1 comme racine. En effectuant la division euclidienne, on obtient :

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2+x-1}{x+1} \\ &\boxed{= \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**Exercice 195 (Système)**
On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x+2y-z &=& 0 \\ -2x-(3+\lambda)y+3z &=& 0 \\ x+y-(2+\lambda)z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& (2+\lambda)z &=& 0 \\ -2x &-& (3+\lambda)y &+& 3z &=& 0 \\ (1-\lambda)x &+& 2y &-& z &=& 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& (2+\lambda)z &=& 0 \\ &-& (1+\lambda)y &-& (1+2\lambda)z &=& 0 \\ && (1+\lambda)y &+& (-\lambda^2-\lambda+1)z &=& 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} \\ L_2+2L_1 \to L_2 \\ L_3-(1-\lambda)L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& (2+\lambda)z &=& 0 \\ &-& (1+\lambda)y &-& (1+2\lambda)z &=& 0 \\ && 0 &+& (-\lambda^2-3\lambda)z &=& 0 \end{array}\right. \quad L_3+L_2 \to L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& (2+\lambda)z &=& 0 \\ &-& (1+\lambda)y &-& (1+2\lambda)z &=& 0 \\ && 0 &+& -\lambda(\lambda+3)z &=& 0 \end{array}\right.$$

Ce système est de Cramer si et seulement si les pivots sont non nuls. Or les pivots sont nuls si et seulement si

$$1+\lambda=0 \iff \lambda=-1 \quad \text{et} \quad \lambda(\lambda+3)=0 \iff \lambda=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=-3$$

Il y a donc 4 cas possibles.

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0\}$ : Dans ce cas, le système est de Cramer et il n'a qu'une unique solution qui est forcément $(0,0,0)$.
2. Si $\lambda=-1$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& z &=& 0 \\ && 0 &-& 0 &=& 0 \\ &&&& 2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} && x &=& -y \\ 0 &+& z &=& 0 \\ && z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}}$$

3. Si $\lambda=-3$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 0 \\ && 2y &+& 5z &=& 0 \\ &&&& 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& +\frac{3}{2}z \\ y &=& -\frac{5}{2}z \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ -\frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}}$$

4. Si $\lambda=0$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& 2z &=& 0 \\ &-& y &-& z &=& 0 \\ &&&& 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3z \\ y &=& -z \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix} 3z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}}$$

**Exercice 196 (Intégrales / Primitives)**

1. La fonction $x \to -\dfrac{3}{x^2}$ est continue sur $[1,3]$ car $x^2$ différent de 0 sur cet intervalle. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_1^3 -\frac{3}{x^2}dx &= \left[\frac{3}{x}\right]_1^3 \\ &= \frac{3}{3} - \frac{3}{1} \\ &\boxed{= -2}\end{aligned}$$

2. La fonction $x \to e^{5x+1}$ est continue sur $[0,4]$ en tant que composée de fonction continue. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^{5x+1}dx &= \left[\frac{1}{5}e^{5x+1}\right]_0^4 \\ &\boxed{= \frac{e^{21}-e}{5}}\end{aligned}$$

3. Pour $x \in [0,2]$, $3x^3+1 \neq 0$. La fonction $x \to \dfrac{x^2}{3x^3+1}$ est continue sur $[0,2]$ en tant que quotient de fonctions continues. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{3x^3+1}dx &= \left[\frac{1}{9}\ln(3x^3+1)\right]_0^2 \\ &\boxed{= \frac{\ln(25)}{9} - 0}\end{aligned}$$