

Correction Calculs du 08/02 au 14/02

Exercice 183 (Dérivées)

1. La fonction $x \rightarrow -x^2 + 4x$ est dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $X \rightarrow X^4$ est dérivable sur \mathbb{R} . Donc par composée de fonctions, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . On calcule alors

$$f'(x) = 4 \times (-2x + 4)(-x^2 + 4x)^3$$

2. Afin de déterminer le domaine de dérivabilité de g , il faudrait résoudre $x^2 + 3x + 1 > 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 9 - 4 = 5$. Ainsi

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

La fonction g est donc dérivable sur $] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$. On a dans ce cas,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2 + 3x + 1) - (2x + 3)(x - 5)}{(x^2 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1 - 2x^2 + 7x + 15}{(x^2 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 10x + 16}{(x^2 + 3x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 16}{(x^2 + 3x + 1)^2}$$

Exercice 184 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. On résout pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{x^2+2x+\ln(2)} \geq 2 &\iff x^2 + 2x + \ln(2) \geq \ln(2) \\ &\iff x^2 + 2x \geq 0 \\ &\iff x(x + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

En traçant un tableau de signe, on détermine l'ensemble des solutions

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_1 =] -\infty; -2[\cup]0; +\infty[.$$

2. Pour tout x réel, on a $x^2 \geq 0$ et notamment $x^2 + 2 \geq 0$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}.$$

Exercice 185 (Récurrence)

On considère la fonction $f : x \rightarrow e^{-x^2}$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ f \text{ est dérivable } n \text{ fois et } f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme de degré } n \right\}.$$

- **Initialisation** : Par définition $f^{(0)} = f$ Or en posant $P_0(X) = 1$, on a bien $\deg(P_0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_0(x)e^{-x^2} := f^{(0)}(x)$$

- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n , est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On sait alors que la fonction f est dérivable n fois et que sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(P_n) = n$. Or La fonction P_n est dérivable sur \mathbb{R} (Polynôme) et la fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R} (en tant que composée). Donc, par produit la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et donc la fonction f est dérivable $(n + 1)$ fois sur \mathbb{R} . En dérivant, on obtient pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = P_n'(x)e^{-x^2} + P_n(x) \times (-2x)e^{-x^2} \\ &= (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2} \end{aligned}$$

On pose alors le polynôme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2XP_n(X)$. (Il s'agit bien d'un polynôme puisque la dérivée d'un polynôme est un polynôme, le produit et la somme de 2 polynômes sont des polynômes).

De plus, $\deg(-2XP_n(X)) = n + 1$ et $\deg(P_n'(X)) = n - 1$ donc $\deg(P_{n+1}(X)) = n + 1$.

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \geq 0$, f est dérivable n fois et $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$. De plus, P_n est bien un polynôme de degré n obtenu par la relation :

$$\boxed{P_0 = 1, \quad P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2XP_n(X).}$$

Exercice 186 (Sommes)

On détermine a et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1} &\iff \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a(k + 1)}{k^2 - 1} + \frac{b(k - 1)}{k^2 - 1} \\ &\iff \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{ak + a + bk - b}{(k + 1)(k + 2)} \\ &\iff (a + b)k + a - b = 1 \end{aligned}$$

Par identification, on pose le système,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2(k - 1)} - \frac{1}{2(k + 1)}$$

Ainsi, on reconnaît une somme télescopique

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \boxed{\frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}}
 \end{aligned}$$

Exercice 187 (Probabilité)

Un joueur lance 3 fois une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in]0, 1[$ de faire Pile. Le joueur gagnera j euros si pile tombe pour la première fois au j -ème tirage. Il perd 1 euro si pile ne tombe pas lors des 3 tirages. On note G le gain du joueur.

La variable aléatoire G peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3. Donc

$$G(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$$

On note P_j , l'évènement "obtenir un Pile au j -ième tirage et F_j , l'évènement "Obtenir un Face au j -ième tirage". Ainsi :

$$P(G = 1) = P(P_1) = p$$

Les évènements F_1 et P_2 sont

$$\begin{aligned}
 P(G = 2) &= P(F_1 \cap P_2) \\
 &= P(F_1)P(P_2) \\
 &= (1-p)p
 \end{aligned}$$

Enfin, les évènements F_1 , F_2 et P_3 sont mutuellement indépendants et donc

$$\begin{aligned}
 P(G = 3) &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3) \\
 &= P(F_1)P(F_2)P(P_3) \\
 &= (1-p)^2 p
 \end{aligned}$$

Enfin, on n'obtient aucun pile si nous avons obtenu que des Face.

$$\begin{aligned}
 P(G = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\
 &= (1-p)^3
 \end{aligned}$$

L'espérance de G se calcule ainsi.

$$\begin{aligned}
 E(G) &= 0 \times P(G = 0) + 1 \times P(G = 1) + 2 \times P(G = 2) + 3 \times P(G = 3) \\
 &= p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 p \\
 &= p(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2) \\
 &= \boxed{p(6 - 8p + p^2)}
 \end{aligned}$$

Exercice 188 (Limites)

1. On rappelle que par taux d'accroissement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{x}{e^x - 1} = 0.$$

2. On a par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^3}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^3}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^3}{x} \times \frac{x}{e^{2x}} = 0$$

Exercice 189 (Système)

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + (2 - \lambda)y = 0 \\ \lambda x + y = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x + (2 - \lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda(2 - \lambda))y = 0 \end{cases} & L_2 - \lambda L_1 \rightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x + (2 - \lambda)y = 0 \\ (1 - 2\lambda + \lambda^2)y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (2 - \lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda)^2 y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer si et seulement si les pivots sont non nuls. Or les pivots sont nuls si et seulement si

$$(1 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 1$$

Il y a donc 3 cas possibles.

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: Dans ce cas, le système est de Cramer et il n'a qu'une unique solution qui est forcément $(0, 0)$.
2. Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$