Correction Calculs du 01/02 au 07/02

Exercice 176 (Dérivées)

1. La fonction $x \to x^2+4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $X \to X^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composée de fonctions, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule alors
$$\boxed{f'(x) = 3(2x)(x^2+4)^2 = 6x(x^2+4)^2}$$
2. Afin de déterminer le domaine de dérivabilité de g, il faudrait résoudre $x^3+x^2+1>0$. Or, ce polynôme n'a pas de racines évidente. On ne peut donc pas factoriser ni résoudre cette inéquation. On remarque néanmoins que pour $x \geq 0$, $x^3+x^2+1>0$. Donc la fonction g est à minima dérivable sur $[0;+\infty[$.
On calcule alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\boxed{g'(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}}$$

Exercice 177 (Inéquations)
Résoudre les inéquations suivantes.

1. On résout pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$$\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{1}{x-1} \iff 1 \geq \frac{x^2+1}{x-1}$$
car pour tout x réel, $x^2+1>0$. On poursuit
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{1}{x-1} &\iff \frac{x^2+1}{x-1} - 1 \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2+1-(x-1)}{x-1)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2-x+2}{x-1} \leq 0\end{aligned}$$
On résout alors $x^2-x+2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1-8 = -7$. Cette équation n'a pas de solution donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2-x+2>0.$$
Donc la fraction est du signe de $x-1$. Elle est donc négative sur $]-\infty;1[$. Ainsi
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 =]-\infty;1[.}$$
2. L'expression $\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$ est une somme de termes strictement positif donc elle ne pourra jamais être négative quel que soit le nombre n
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \emptyset.}$$

Exercice 178 (Récurrence)
On va montrer par récurrence les propositions
$$\mathcal{P}_n : \left\{ f \text{ est dérivable n fois et } f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2+3x} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme de degré } n \right\}.$$

- **Initialisation :** Par définition $f^{(0)} = f$ Or en posant $P_0(X) = 1$, on a bien $deg(P_0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_0(x)e^{x^2+3x} := f^{(0)}(x)$$

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$, est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On sait alors que la fonction f est dérivable n fois et que sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2+3x}$$

avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et $deg(P_n) = n$. Or La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et la fonction $x \to e^{x^2+3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée). Donc, par produit la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est dérivable $(n+1)$ fois sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &= P_n'(x)e^{x^2+3x} + P_n(x) \times (2x+3)e^{x^2+3x} \\ &= (P_n'(x) + (2x+3)P_n(x))e^{x^2+3x} \end{aligned}$$

On pose alors le polynôme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) + (2X+3)P_n(X)$. (Il s'agit bien d'un polynôme puisque la dérivée d'un polynôme est un polynôme, le produit et la somme de 2 polynômes sont des polynômes).

De plus, $deg((2X+3)P_n(X)) = n+1$ et $deg(P_n'(X)) = n-1$ donc $deg(P_{n+1}(X)) = n+1$.

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ f \text{ est dérivable n fois et } f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2+3x}}$. De plus, P_n est bien un polynôme de degré n obtenu par la relation :

$$\boxed{P_0 = 1, \qquad P_{n+1}(X) = P_n'(X) + (2X+3)P_n(X).}$$

Exercice 179 (Sommes)

On détermine a et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} &\iff \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{b(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &\iff \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{ak+2a+bk+b}{(k+1)(k+2)} \\ &\iff (a+b)k + 2a + b = 1 \end{aligned}$$

Par identification, on pose le système,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

Ainsi, on reconnait une somme télescopique

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{0+1} - \frac{1}{n+2} \\ &\boxed{= 1 - \frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

Exercice 180 (Probabilité)
Un avion peut accueillir 20 personnes. On sait que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après avoir réservé".

L'expérience "Un client vient après avoir réservé" est une expérience de Bernoulli (il n'y a que 2 issues possibles) de probabilité de succès $p = 0,75$. On répète cette expérience 20 fois (pour chaque client) de façon indépendante et X compte le nombre de succès de cette expérience. Donc X suit une loi binomiale de paramètre 20 et $0,75$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(20, 3/4)}$$

On a donc

$$\boxed{E(X) = 20 \times \frac{3}{4} = 15 \text{ et } V(X) = 20 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}}$$

Exercice 181 (Limites)

1. On rappelle que par taux d'accroissement,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1.}$$

2. A l'aide du changement de variable $X = x^2$, on a par croissance comparée,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty}$$

Exercice 182 (Système)
On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & y & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \\ (2-\lambda)x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \\ & & (1-(2-\lambda)^2)y & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 - (2-\lambda)L_1 \to L_2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \\ & & (\lambda-1)(3-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 - (2-\lambda)L_1 \to L_2 \end{aligned}$$

Ce système est de Cramer si et seulement si les pivots sont non nuls. Or les pivots sont nuls si et seulement si

$$(\lambda - 1)(3 - \lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = 3$$

Il y a donc 3 cas possibles.

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$: Dans ce cas, le système est de Cramer et il n'a qu'une unique solution qui est forcément $(0, 0)$.
2. Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -y \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. Si $\lambda = 3$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}}$$