

Correction Calculs du 25/01 au 31/01

Exercice 169 (Dérivées)

1. Pour tout x réel, la quantité $x^2 + 4$ est positive ou nulle. De plus les fonctions $x \rightarrow x^2 + 4$ et racine carrée sont respectivement dérivables sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}_+ donc (par composée) la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . On calcule alors

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

2. On résout $x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x(x - 1)(x + 1) = 0$. Les solutions de cette équation sont donc $\{-1, 0, 1\}$. Par composée, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^3 - x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On calcule alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

$$g'(x) = -\frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^2}$$

Exercice 170 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. On résout pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x - xe^x \geq 0 \iff x(1 - e^x) \geq 0$$

Il faut alors construire un tableau de signe. On rappelle que $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff x \leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x	-	0	+
Signe de $1 - ex$	+	0	-
Signe de $x - xe^x$	-	0	-

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_1 = \{0\}$.

2. On résout l'inéquation $x^3 - 1 < 0$ à l'aide d'un tableau de signe. Pour cela il faut connaître les racines des polynômes $x^3 - 1$. Or 1 est une racine évidente du polynôme $x^3 - 1$ donc, à l'aide d'une division euclidienne, on obtient

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc la quantité $x^2 + x + 1$ est toujours positive. Le signe de $x^3 - 1$ est donc le même que le signe de $x - 1$. Ainsi,

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_2 =]-\infty; 1[$.

Exercice 171 (Récurrence)

On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ \sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2 \right\}.$$

- **Initialisation** : On calcule d'une part $\sum_{k=0}^0 k2^k = 0$. D'autre part $(0-1)2^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0$. Donc la proposition \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n , est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

En utilisant la relation de Chasles pour les sommes, on obtient,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=0}^n k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 \quad \text{On factorise par } 2^{n+1} \\ &= 2n \times 2^{n+1} + 2 \\ &= n2^{n+2} + 2 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0, \sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2}.$

Exercice 172 (Sommes)

Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule en séparant les deux sommes (propriété de linéarité) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k^3 - 2 \times 3^k) &= \sum_{k=0}^n k^3 - 2 \sum_{k=0}^n 3^k \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 2 \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \\ &= \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 1 - 3^{n+1}} \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k 3^{n-k} &= (4+3)^n \\ &= \boxed{7^n} \end{aligned}$$

3. On remarque que $\ln(1) = 0$ or si l'on multiplie des termes par 0, on obtient 0. Donc

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \ln(k) = 0.}$$

Exercice 173 (Probabilité)

Dans un magasin, il y a n clients et m caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard et on appelle X le nombre de client choisissant la caisse numéro 1.

L'expérience "Un client choisit la caisse numéro 1 ou non" est une expérience de Bernoulli (il n'y a que 2 issues possibles) de probabilité de succès $p = \frac{1}{m}$. On répète cette expérience n fois (pour chaque client) de façon indépendante et X compte le nombre de succès de cette expérience. Donc X suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{m}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{m}\right)$$

On a donc

$$E(X) = \frac{n}{m} \text{ et } V(X) = \frac{n}{m} \times \frac{(m-n)}{m}$$

Exercice 174 (Limites)

1. On rappelle que $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$. Or par taux d'accroissement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/x} = e.$$

2. On factorise l'expression par x^3 c'est-à-dire

$$x^3 - x \ln(x) = x^3 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x \ln(x) = +\infty$$

Exercice 175 (Système)

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour inverser la matrice :

$$\begin{array}{ccc|ccc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & 2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} 2L_1 + L_2 \rightarrow L_1 \\ L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \end{array}$$

Les pivots sont tous non-nuls donc la matrice A est inversible.

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -9 & -5 & -2 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 4L_1 - 9L_3 \rightarrow L_1 \\ 4L_2 - 3L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/8 & -5/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & -2/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & -2/4 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 1/8L_1 \rightarrow L_1 \\ -1/8L_2 \rightarrow L_2 \\ -1/4L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \end{array}$$

En mettant tout les termes sur 8, on en déduit que

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$