Correction Calculs du 18/01 au 24/01

Exercice 162 (Dérivées)

1. Pour tout x réel, la quantité x^2+4 est strictement positive. De plus les fonctions $x \to x^2+4$ et ln sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule alors
$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}}$$
2. La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $x \to e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   On calcule alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{g'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}$$

Exercice 163 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. On résout pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^3-5x-3 \geq 1 \iff x^3-5x-4 \geq 0$$
La méthode appropriée ici est de factoriser le polynôme $P(x) = x^3-5x-4$ afin de pouvoir tracer un tableau de signe. Or $P(-1) = -1+5-4 = 0$ donc -1 est une racine évidente. On divise donc P par le polynôme $x+1$ (méthode de la division euclidienne). On obtient alors :
$$P(x) = (x+1)(x^2-x-4)$$
Il faut ensuite regarder si l'on peut factoriser x^2-x-4. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = 1-4\times(-4) = 17$. L'équation $x^2-x-4=0$ possède donc deux solutions
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$
Il faut comparer ces nombres à -1 afin de pouvoir tracer correctement le tableau de signe. On a évidemment $x_2 > -1$ car x_2 est positif. Pour x_1, remarquons que
$$\begin{aligned} 4 \leq \sqrt{17} \leq 5 &\iff -4 \geq -\sqrt{17} \geq -5 \\ &\iff -3 \geq 1-\sqrt{17} \geq -4 \\ &\iff -\frac{3}{2} \geq \frac{1-\sqrt{17}}{2} \geq -2 \end{aligned}$$
Or $-3/2 < -1$ donc $x_1 < -1$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		-1		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x^2-x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x^3-5x-4		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left[\frac{1-\sqrt{17}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right[.}$$

2. On résout l'inéquation $\dfrac{x^3-8}{x^2-1} > 0$ à l'aide d'un tableau de signe. Pour cela il faut connaitre les racines des polynômes x^3-8 et du polynôme x^2-1. Or 2 est une racine évidente du polynôme x^3-8 donc, à l'aide d'une division euclidienne, on obtient
$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$
Le discriminant de l'équation $x^2+2x+4=0$ est $\Delta = 4-16 = -12 < 0$ donc la quantité x^2+2x+4 est toujours positive. Enfin les racines du polynôme x^2-1 sont 1 et -1. On en déduit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2+2x+4		$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x^3-8}{x^2-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi,
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]-1;1[\cup]2;+\infty[.}$$

Exercice 164 (Récurrence)
On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant
$$\forall n \geq 1, 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0. \tag{1}$$
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant (1) avec $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. On va montrer par récurrence (forte) les propositions
$$\mathcal{P}_n : \{v_n = 0\}.$$

- **Initialisation :** On sait que d'une part $v_0 = v_1 = v_2 = 0$. Donc $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sont vraies.

- **Hérédité :** On suppose que les propositions $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$ sont vraies pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $v_n = v_{n+1} = v_{n+2} = 0$. En utilisant la relation (1), on obtient,

$$\begin{aligned} 9v_{n+3} &= 9v_{n+2} + 7v_{n+1} + 7v_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $v_{n+3} = 0$. la proposition $\mathcal{P}_{n+3}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ v_n = 0}$.

Exercice 165 (Sommes)
Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule en faisant apparaitre une somme géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} e^{-k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1}{e^1}\frac{1-(1/e)^n}{1-1/e} \\ &= \boxed{\frac{1-(1/e)^n}{e-1}} \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \times 1^{n-k} \\ &= (3+1)^n \\ &\boxed{= 4^n} \end{aligned}$$

3. On calcule en remarquant une somme télescopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2-1} \\ &\boxed{= \frac{1}{n} - 1} \end{aligned}$$

Exercice 166 (Probabilité)
On lance 2 fois un dé équilibré à 12 faces et on note X la variable aléatoire qui vaut 0 si on fait 2 ou 11 et 1 sinon. Donnez la loi, l'espérance et la variance de X.

Il n'y a donc que deux valeurs prises par X possibles : 0 ou 1. Donc $X(\Omega) = \{0, 1\}$. X suit donc une loi de Bernoulli dont la probabilité de succès est à déterminer. Notons les évènements A_2 : "Obtenir 2 avec les deux dés" et A_{11} : "Obtenir 11 avec les deux dés". On calcule les probabilités de A_2 et $A_1 1$ en utilisant le dénombrement. Ici, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ (tirages de deux dés donc ordre et remise) et $card(\Omega) = 36$. De plus

$$A_2 = \{(1,1)\} \quad \text{et} \quad A_{11} = \{(6,5); (5,6)\}$$

On en déduit donc les probabilités

$$P(A_2) = \frac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad P(A_{11}) = \frac{2}{36}$$

Or, comme les évènements A_2 et A_{11} sont incompatibles,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(A_2 \cup A_{11}) \\ &= P(A_2) + P(A_11) \\ &\boxed{= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}} \end{aligned}$$

Donc $(X=0),(X=1)$ formant un système complet d'évènement, on a

$$\boxed{P(X=1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}}$$

$$\boxed{\text{On a } X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{11}{12}\right)}$$

D'après le cours

$$\boxed{E(X) = \frac{11}{12} \text{ et } V(X) = \frac{11}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{11}{144}}$$

Exercice 167 (Limites)

1. On a $1+3\times 1-4=0$ donc on est bien face à une forme indéterminée $(0/0)$. 1 est racine du polynôme x^2+3x-4, en posant par exemple la division euclidienne de x^2+3x-4 par $x-1$, on obtient,
$$x^2+3X-4=(x-1)(x+4)$$
Donc
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{x^2+3x-4}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} x+4 \\ &\boxed{=5} \end{aligned}$$

2. On reconnait une fraction rationnelle donc
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+34}{x^7-x^6+5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^7} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} \\ &\boxed{=0} \end{aligned}$$

Exercice 168 (Système)

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 & \\ & & 8y & - & 15z & = & -38 & \quad L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ & & 4y & - & 16z & = & -36 & \quad L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 & \\ & & 8y & - & 15z & = & -38 & \\ & & & - & 17z & = & -34 & \quad 2L_3 - L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 10 & = & 13 \\ & & 8y & - & 30 & = & -38 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S} = \{(1, -1, 2)\}}$$