Correction Calculs du 11/01 au 17/01

Exercice 155 (Dérivées)

1. On résout l'inéquation
$$2x^3+3x>0 \iff x(2x^2+3)>0$$
à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $2x^2+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x^3+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc dérivable sur $\left]-\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right[$ et sur $\left]\sqrt{\dfrac{3}{2}};+\infty\right[$ en tant que produit et composée de fonction dérivable. On calcule alors
$$\boxed{f'(x)=\frac{6x^2+3}{2x^3+3x}}$$

2. La fonction $x\to -\dfrac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme). La fonction $x\to e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On calcule alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\boxed{= -xe^{-\frac{x^2}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 156 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. On résout pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned} \frac{xe^x-1}{x}\geq e^x &\iff \frac{xe^x-1}{x}-e^x\geq 0 \\ &\iff \frac{xe^x-1-xe^x}{x}\geq 0 \\ &\iff -\frac{1}{x}\geq 0 \\ &\iff \frac{1}{x}\leq 0 \end{aligned}$$
Or la fonction $x\to 1/x$ est négative sur $]-\infty;0[$ donc $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1=]-\infty;0[.}$

2. On résout l'inéquation $2x^2 - 3x + 1 < 0$ à l'aide du discriminant $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$. Ainsi le polynôme $2x^2 - 3x + 1$ a deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+1}{4} = 1$$

Ainsi, (à l'aide d'un tableau de signe par exemple)

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \left]\frac{1}{2};1\right[.}$$

Exercice 157 (Récurrence)
On considère que $A = PDP^{-1}$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{A^n = PD^nP^{-1}\right\}.$$

- **Initialisation :** On sait que d'une part $A^0 = I_n$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times D \times P^{-1} \\ &\boxed{= PD^{n+1}P^{-1}} \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

Exercice 158 (Sommes)
Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule en factorisant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n} 2 \times 2^{2k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} 4^k \\ &= 8 \times \frac{1-4^n}{1-4} \\ &= \boxed{\frac{8}{3}(4^n - 1)} \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-3)^{n-k} &= (2-3)^n \\ &\boxed{= (-1)^n} \end{aligned}$$

3. On calcule en développant,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1-6)}{6} \\ &\boxed{= \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}}\end{aligned}$$

Exercice 159 (Probabilité)
Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne.

Il n'y a donc qu'une valeur prise par X qui est 12. Ainsi

$$X(\Omega) = \{12\}$$

$$\boxed{X \text{ suit une loi certaine. } E(X) = 12,\ V(X) = 0.}$$

Exercice 160 (Limites)

1. On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

par taux d'accroissement donc en composant les limites,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{\substack{X\to 1\\ >}} \ln X = 0}$$

2. On a en utilisant la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}\right)} \\ &= \frac{x^2+1-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2} = +\infty$. donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2} = 0}$$

Exercice 161 (Système)
Soit

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^{-1}.En déduire les solutions de $\begin{cases} x - z &= 4 \\ 2y &= 16 \\ x + z &= 15 \end{cases}$

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour inverser A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \quad L_3 - L_1 \to L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \quad 2L_1 + L_3 \to L_1$$

Les pivots sont tous non-nuls donc la matrice A est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \quad \begin{matrix} 1/2L_1 \to L_1 \\ 1/2L_2 \to L_2 \\ 1/2L_3 \to L_3 \end{matrix}$$

Donc

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le système est équivalent à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$

Or

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution du système est } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}}$$