Du 17 au 23 Décembre.

Exercice 148 : ① $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$

$= -\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$

$g'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$

Exercice 149

① $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+4} \geq 0$

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-4[\ \cup\ [-1\,;+\infty[}$$

② $\dfrac{x^3-8}{x^2-1} > 0$

On a $x^3-8>0 \iff x^3>8$

$\iff x>2$

Car $x \mapsto x^3$ est une bijection donc il existe une fonction réciproque croissante

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^3-8		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^3-8}{x^2-1}$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-1\,;1[\ \cup\ ]2\,;+\infty[.}$$

Exercice 150

On note $P_n : \{5^n \geq 4^n+3^n\}$.

. Initialisation P_2 s'écrit $5^2 \geq 4^2+3^2$ avec $5^2 = 25$ et $4^2+3^2 = 16+9 = 2$

Donc P_2 est vraie.

. Hérédité : On suppose P_n vraie pour un certain $n \geq 2$.

$5^n \geq 4^n + 3^n$

$\iff 5^{n+1} \geq 5\times(4^n+3^n)$

$\iff 5^{n+1} \geq 5\times 4^n + 5\times 3^n$

$\iff 5^{n+1} \geq 4\times 4^n + 3\times 3^n$

$\iff 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie. (P_n) est héréditaire

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2 \quad 5^n \geq 4^n + 3^n.}$

Exercice 151

1) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{3k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e} \times \frac{1}{(e^3)^k}$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(e^3)^k}$$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^3} \left(\frac{1 - (1/e^3)^n}{1 - \frac{1}{e^3}} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \times \left(\frac{1 - e^{-3n}}{e^3 - 1} \right)$$

2) $$\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= 3^n \times \left(\frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} \right)$$

$$= 3^{n+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$= 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

3) $$\sum_{k=1}^{n+3} k+1 = \sum_{k=1}^{n+3} k + \sum_{k=1}^{n+3} 1$$

$$= \frac{(n+3)(n+4)}{2} + \frac{2(n+3)}{2}$$

$$= \frac{(n+3)(n+4+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+3)(n+6)}{2}.$$

Exercice 152

Cet évènement est impossible. Donc la probabilité est nulle.

Exercice 153

1) On rappelle $2^x = e^{x \ln(2)}$

$$\lim_{x \to 0} 2^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} 1 + x + x^3 = 1.$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1+x+x^3}{2^x} = 1}$

2) $$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{x(1 - 1/x)}{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1 - 1/x}{1 - 1/x - 1/x^2 + 1/x^3} \right)$$

$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1} = 0}$

3) $x^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1}$

Exercice 154.

Ce système a une unique solution $\boxed{\mathcal{S} = \{(4; 5; -3)\}}$