Correction Calculs du 30/11 au 6/12

Exercice 134 (Équations)

1. On résout l'équation

$$\begin{aligned} e^{2x^2}-3=0 &\iff e^{2x^2}=3 \\ &\iff 2x^2=\ln(3) \\ &\iff x^2=\frac{\ln(3)}{2} \\ &\iff x=\pm\sqrt{\frac{\ln(3)}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_1=\left\{-\sqrt{\frac{\ln(3)}{2}};\sqrt{\frac{\ln(3)}{2}}\right\}}$$

2. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x^4-1=0 &\iff (x^2-1)(x^2+1)=0 \\ &\iff (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \\ &\iff x=-1 \quad \text{ou} \quad x=1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{\mathscr{S}_2=\{-1,1\}}$$

Exercice 135 (Dérivées)

1. On résout l'inéquation

$$\frac{3x+2}{-2x+5}\geq 0$$

à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$		$-2/3$		$5/2$		$+\infty$
Signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x+5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{3x+2}{-2x+5}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

La fonction f est donc dérivable sur $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient et composée de fonction dérivable. On calcule alors

$$f'(x) = \frac{\dfrac{3\times(-2x+5)-(-2)\times(3x+2)}{(-2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x+2}{-2x+5}}}$$
$$\boxed{= \frac{19}{2\times(-2x+5)^2\sqrt{\dfrac{3x+2}{-2x+5}}}}$$

2. On résout
$$x-2>0 \iff x>2$$
et $\ln(x-2)=0 \iff x-2=1 \iff x=3$. La fonction g est donc dérivable sur $]2;3[\cup]3;+\infty[$. On calcule alors
$$g'(x) = \frac{-\dfrac{1}{x-2}}{(\ln(x-2))^2}$$
$$\boxed{= -\frac{1}{(x-2)\ln(x-2))^2}}$$

Exercice 136 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation $2x^2-3x+2<0$ à l'aide du discriminant $\Delta = 9-4\times 2\times 2 = -7<0$. Ainsi le polynôme $2x^2-3x+2$ ne change pas de signe et est toujours positif.
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est alors } \mathscr{S}_1 = \emptyset.}$$
2. On résout l'inéquation $2x^2 < 5x-2 \iff 2x^2-5x+2<0$ en utilisant le discriminant $\Delta = 25-4\times 2\times 2 = 9$. On a alors deux racines :
$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$
Ainsi,
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \left]\frac{1}{2};2\right[.}$$

Exercice 137 (Récurrence)

Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1} = u_n + x^{n+1}$. On va montrer par récurrence les propositions
$$\mathcal{P}_n : \left\{u_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right\}.$$

- **Initialisation :** On sait que d'une part $u_0 = 1$ et $\dfrac{1-x^{0+1}}{1-x} = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n\geq 0$. On a alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \\ &\boxed{= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}} \end{aligned}$$
Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ u_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}}$.

Exercice 138 (Sommes)
Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule en factorisant :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{k+1} &= e\sum_{k=0}^{n} e^k \\ &= \boxed{e \times \left(\frac{1-e^{n+1}}{1-e}\right)}\end{aligned}$$

2. En utilisant un changement d'indice $j = n-k$ on calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n-k) &= \sum_{j=0}^{n} j \\ &\boxed{= \frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

3. On calcule enfin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{n-k} &= 2^n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ &= 2^n \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} \\ &= -2^{n-1} \times \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \\ &\boxed{= \frac{2^n}{3}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1\right)}\end{aligned}$$

Exercice 139 (Probabilité)
On tire trois cartes simultanément dans un paquet de 32 cartes.On note A l'évènement "n'obtenir que des coeurs", B l'évènement "n'obtenir que des as" et C l'évènement "Obtenir deux coeurs et un pique".

A l'aide du dénombrement : On note E l'ensemble des cartes ($\#E = 32$) et Ω est donc une combinaison de 3 éléments de E ainsi

$$\#\Omega = \binom{32}{3}$$

On note alors F l'ensemble des cartes de cœurs ($\#F = 8$) L'évènement A est donc l'ensemble des combinaisons de 3

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} \\
&= \frac{\frac{8!}{5! \times 3!}}{\frac{32!}{3! \times 29!}} \\
&= \frac{8 \times 7 \times 6}{32 \times 31 \times 30} \\
&= \frac{7}{4 \times 31 \times 5} \\
&\boxed{= \frac{7}{620}}
\end{aligned}$$

On note G l'ensemble des cartes d'As ($\#G = 4$) L'évènement B est donc l'ensemble des combinaisons de 3 éléments de G ainsi $\#B = \binom{4}{3}$ et donc

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} \\
&= \frac{\frac{4!}{1! \times 3!}}{\frac{32!}{3! \times 29!}} \\
&= \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} \\
&= \frac{1}{8 \times 31 \times 5} \\
&\boxed{= \frac{1}{1240}}
\end{aligned}$$

Enfin, on note H l'ensemble des cartes de piques. On compte le nombre de possibilités dans C ainsi :

— On doit obtenir 2 cœurs (donc combinaison de deux cartes de F

— On doit obtenir 1 pique (donc 1 combinaison de H

Ainsi

$$\#C = \binom{8}{2} \times \binom{8}{1} = \frac{8 \times 7}{2} \times 8$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
P(C) &= \frac{4 \times 7 \times 8}{\binom{32}{3}} \\
&= \frac{3 \times 8 \times 7 \times 8}{32 \times 31 \times 30} \\
&= \frac{7}{31 \times 5} \\
&\boxed{= \frac{7}{155}}
\end{aligned}$$

En utilisant les probabilités : On note C_i l'évènement "tirer un cœurs au i ème tirage". Les évènements C_1, C_2 et C_3 ne sont pas mutuellement indépendants. Donc en utilisant la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(A) &= P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)\\ &= P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) \times P_{C_1 \cap C_2}(C_3)\\ &= \frac{1}{4} \times \frac{7}{31} \times \frac{6}{30}\\ &\boxed{= \frac{7}{620}}\end{aligned}$$

On note les évènements A_i : "On tire un As au i-ième tirage". Les évènements A_1, A_2 et A_3 ne sont pas mutuellement indépendants donc

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\\ &= \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} \times \frac{2}{30}\\ &\boxed{= \frac{1}{1240}}\end{aligned}$$

On note enfin les évènements P_i : "On tire un pique au i-ième tirage". Ainsi

$$C = (C_1 \cap C_2 \cap P_3) \cup (C_1 \cap P_2 \cap C_3) \cup (P_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

Les évènements $(C_1 \cap C_2 \cap P_3)$, $(C_1 \cap P_2 \cap C_3)$ et $(P_1 \cap C_2 \cap C_3)$ sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}P(C) &= P(C_1 \cap C_2 \cap P_3) + P(C_1 \cap P_2 \cap C_3) + P(P_1 \cap C_2 \cap C_3)\\ &= \frac{1}{8} \times \frac{7}{31} \times \frac{8}{30} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{31} \times \frac{7}{30} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{31} \times \frac{7}{30}\\ &\boxed{= \frac{7}{155}}\end{aligned}$$

Exercice 140 (Limites)

1. On a la relation

$$\frac{x^2+3x-1}{x-1} = \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x-1} = +\infty}$$

On sait que par croissance comparée,

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x)}{e^x} = 0}$$