Correction Calculs du 23/11 au 29/11

Exercice 127 (Composée de limite)

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x^2}=2$ donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}}$$
2. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} x-2=0^+$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \ln(x-2)=-\infty$ donc
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} -2\ln(x-2)=+\infty}$$
3. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et donc
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1}$$

Exercice 128 (Croissance comparée)

1. Par croissance comparée, on a
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}=+\infty}$$
2. Par croissance comparée, on a
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^6\ln(x)=0}$$
3. Par croissance comparée, on a
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0}$$

Exercice 129 (Croissance comparée)

1. En appliquant le changement de variable $X=x^3$, on a par croissance comparée,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^3}}{3x^6}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{3X^2}=+\infty}$$
2. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\frac{1+x^2}{e^x}=\frac{1}{e^x}+\frac{x^2}{e^x}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ par croissance comparée. Donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{e^x}=0}$$
3. On a pour tout x suffisamment grand,
$$\frac{e^{2x}}{\ln(x)}=\frac{e^{2x}}{x}\times\frac{x}{\ln(x)}$$
On a alors par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x)}=+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{\ln(x)} = +\infty}$$

Exercice 130 (Indétermination(1))

1. Pour lever l'indétermination sur cette limite, on factorise par $-x^4$. On a

$$-x^4 + x^2 - 2x = -x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

Or $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} -x^4 + x^2 - 2x = -\infty}$$

2. On factorise par e^x pour obtenir

$$e^x - x + \ln(x) = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{\ln(x)}{e^x}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée. De plus

$$\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}$$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x - x + \ln(x) = +\infty}$$

3. On utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4-2} - x^2 &= \frac{(\sqrt{x^4-2} - x^2)(\sqrt{x^4-2} + x^2)}{\sqrt{x^4-2} + x^2} \\ &= \frac{(\sqrt{x^4-2})^2 - x^4}{\sqrt{x^4-2} + x^2} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^4-2} + x^2}\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^4-2} + x^2 = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^4-2} - x^2 = 0}$$

Exercice 131 (Indétermination(2))

1. On a par croissance comparée

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0}$$

2. En appliquant le changement de variable $X = \sqrt{x}$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x^4+1)e^{-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+1}{e^{\sqrt{x}}}\\ &= \lim_{X\to+\infty}\frac{X^2+1}{e^X}\\ &= \lim_{X\to+\infty}\frac{X^2}{e^X}+\frac{1}{e^X}\end{aligned}$$

Or $\lim_{X\to+\infty}\frac{X^2}{e^X} = 0$ par croissance comparée et $\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^4+1)e^{-\sqrt{x}} = 0}$$

3. Enfin, en posant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on remarque que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1}$$

On reconnait en effet un taux d'accroissement.

Exercice 132 (Indétermination(3))

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x}{3x^3+2} &= \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}{3x^3\left(1+\frac{2}{3x^3}\right)}\\ &= \frac{\left(1-\frac{4}{x}\right)}{3x\left(1+\frac{2}{3x^3}\right)}\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{3x^3}\right) = 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{3x^3+2} = 0}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{\ln(x)-1} &= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)}\\ &= \frac{x^2}{\ln(x)}\times\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)}\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right) = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{\ln(x)-1} = +\infty}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{e^x+e^{-x}}{x^2-\ln(x)} &= \frac{e^x(1+e^{-2x})}{x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}\\ &= \frac{e^x}{x^2}\times\frac{1+e^{-2x}}{1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{x^2-\ln(x)} = +\infty}$$

Exercice 133 (Indétermination(4))

1. On calcule

$$\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1}$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x-1 = 0^+$ et donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} = +\infty}$$

2. En appliquant le changement de variable $X = x-1$, on obtient un taux d'accroissement :

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to0} \frac{\ln X+1}{X} = 1}$$

3. On remarque que le numérateur est une identité remarquable (On peut également passer par le changement de variable $X = \sqrt{x}$ afin de le mettre en évidence). On a alors

$$\frac{x-4\sqrt{x}+4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2-\sqrt{x}} = \frac{(2-\sqrt{x})^2}{2-\sqrt{x}} = 2-\sqrt{x}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to4} \frac{x-4\sqrt{x}+4}{2-\sqrt{x}} = 0}$$