Correction Calculs du 16/11 au 22/11

Exercice 120 (Équations)

1. On résout l'équation $x^2+x-2=0$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 1-4\times1\times(-2)=9$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2}$$
$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$$

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{-2;1\}}$$

2. On résout l'équation $(\ln x)^2+\ln(x)-2=0$ en posant le changement de variable $X=\ln(x)$ pour tout $x>0$. L'équation est alors équivalente à $X^2+X-2=0$. D'après la question précédente, les solutions de cette équations sont $X_1=-2$ et $X_2=1$. L'ensemble des solutions de l'équation $(\ln x)^2+\ln(x)-2=0$ est donc

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{e^{-2}, e\}}$$

Exercice 121 (Limites)

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$. Finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)}{2x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=0.}$$

2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Donc (par somme)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x=e^{-x}}{2}=+\infty.}$$

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-e^{-2x}=3$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{3-e^{-2x}}=\frac{1}{3}}$$

Exercice 122 (Dérivées)

1. On résout l'équation $e^x-e^{-x}=0 \iff e^x=e^{-x} \iff x=-x \iff x=0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivable sur cet intervalle. De plus, on a vérifié que le dénominateur ne s'annulait pas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-(e^{2x}+2+e^{-2x})}{(e^x-e^{-x})^2} \\ &\boxed{= \frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}} \end{aligned}$$

2. La fonction $x \to 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \sqrt{1+x^2}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule alors

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\boxed{= \frac{x}{1+x^2}}$$

Exercice 123 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation en factorisant par e^x. On a donc

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^x \geq 0 &\iff e^x(e^x - 1) \geq 0 \\ &\iff e^x - 1 \geq 0 \qquad \text{car} \quad e^x \geq 0 \\ &\iff e^x - 1 \geq 0 \\ &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff \boxed{x \geq 0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est alors } \mathscr{S}_1 = \mathbb{R}_+.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\frac{x}{1-x^2} < 0 \iff \frac{x}{(1-x)(1+x)} < 0$$

à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{x}{1-x^2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]-1;-0[\cup]1;+\infty[.}$$

Exercice 124 (Récurrence)

On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{4}\right) \right\}.$$

- **Initialisation :** On sait que $\sum_{k=3}^{3} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ et $\ln\left(\frac{3+2}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ Donc $\mathcal{P}_3$ est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 3$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n+1} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) &= \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+2}{4}\right) + \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{4(n+2)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+3}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 3, \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{4}\right)}$.

Exercice 125 (Sommes)

Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule (en remplaçant dans la formule le n par $2n$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}}$$

2. En utilisant un changement d'indice $j = k - 2$ on calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^2 &= \sum_{j=0}^{n} j^2\\ &\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\end{aligned}$$

3. On calcule enfin en utilisant le binôme de Newton

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 \times 3^n - \binom{n}{n} 2^n \times 3^0\\ &= (2+3)^n - 3^n - 2^n\\ &\boxed{= 5^n - 3^n - 2^n}\end{aligned}$$

Exercice 126 (Probabilité)

On tire trois cartes successivement et avec remise dans un paquet de 32 cartes.On note A l'évènement "n'obtenir que des coeurs", B l'évènement "n'obtenir que des as" et C l'évènement "Obtenir deux coeurs et un pique".

A l'aide du dénombrement : On note E l'ensemble des cartes ($\#E = 32$) et Ω est donc un 3-listes de E ainsi

$$\#\Omega = 32^3$$

On note alors F l'ensemble des cartes de cœurs ($\#F = 8$) L'évènement A est donc l'ensemble des 3-listes de F ainsi $\#A = 8^3$ et donc

$$\boxed{P(A) = \frac{8^3}{32^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}}$$

On note G l'ensemble des cartes d'As ($\#G = 4$) L'évènement B est donc l'ensemble des 3-listes de G ainsi $\#B = 4^3$ et donc

$$\boxed{P(B) = \frac{4^3}{32^3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}}$$

Enfin, on note H l'ensemble des cartes de piques. On compte le nombre de possibilités dans C ainsi :

— Pour obtenir 2 cœurs puis un pique (dans cet ordre), on a 8^3 possibilités ($\#F \times F \times H$)

— Il y a 3 façons de placer déterminer le numéro du tirage de la carte de pique.

Ainsi

$$\#C = 3 \times 8^3$$

Ainsi

$$\boxed{P(C) = \frac{3 \times 8^3}{32^3} = \frac{3}{64}}$$

En utilisant les probabilités : On note C_i l'évènement "tirer un cœurs au i ème tirage". Ainsi, comme les évènements C_1, C_2 et C_3 sont mutuellement indépendants

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) \\ &= P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &\boxed{= \frac{1}{64}} \end{aligned}$$

On note les évènements A_i : "On tire un As au i-ième tirage". Les évènements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants donc

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \\ &\boxed{= \frac{1}{512}} \end{aligned}$$

On note enfin les évènements P_i : "On tire un pique au i-ième tirage". Ainsi

$$C = (C_1 \cap C_2 \cap P_3) \cup (C_1 \cap P_2 \cap C_3) \cup (P_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

Les évènements dans chaque intersection sont indépendantes et les évènements $(C_1 \cap C_2 \cap P_3)$, $(C_1 \cap P_2 \cap C_3)$ et $(P_1 \cap C_2 \cap C_3)$ sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C_1 \cap C_2 \cap P_3) + P(C_1 \cap P_2 \cap C_3) + P(P_1 \cap C_2 \cap C_3) \\ &= \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \\ &\boxed{= \frac{3}{64}} \end{aligned}$$