Correction Calculs du 9/11 au 15/11

Exercice 113 (Puissances et racines)
On calcule

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4x^2-4x+1} \\ &= \sqrt{(2x-1)^2} \\ &\boxed{= |2x-1|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{3}\times(-3)\right) \\ &\boxed{= e^1 = e} \end{aligned}$$

Exercice 114 (Équations)

1. On résout l'équation $x^2-5x-6=0$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 25-4\times1\times(-6) = 49$. Cette équation a donc deux solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5-7}{2} \qquad & x_2 &= \frac{5+7}{2} \\ x_1 &= -1 \qquad & x_2 &= 6 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{-1;6\}}$$

2. On résout l'équation $-2x^2+2x+1=0$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 4-4\times1\times(-2) = 12$. Cette équation a donc deux solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2-\sqrt{12}}{-4} \qquad & x_2 &= \frac{-2+\sqrt{12}}{-4} \\ x_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad & x_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

3. On factorise

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+2x=0 &\iff x(x^2-2x+2)=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x^2-2x+2=0 \end{aligned}$$

On résout alors l'équation $x^2-2x+2=0$ en calculant le discriminant $\Delta = 4-4\times2\times1 = -4$. Le discriminant étant négatif, cette équation n'a pas de solutions. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \{0\}}$$

Exercice 115 (Limites)

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. Finalement

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = -\infty.}$$

2. On a $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x-2=-1$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln(x)=0^+$. Donc (par quotient)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x-2}{\ln(x)}=-\infty.}$$

Exercice 116 (Dérivées)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. La fonction $x\to xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x.}$$
2. La fonction $x\to 2^x=e^{x\ln(2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{g'(x)=\ln(2)e^{x\ln(2)}=\ln(2)2^x.}$$
3. La fonction $x\to \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned} h'(x)&=\frac{-e^x(1+e^x)-(1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2}\\ &=\frac{-e^x-e^{2x}-e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2}\\ &\boxed{=\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}} \end{aligned}$$

Exercice 117 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation
$$\begin{aligned} e^{2x}-9\geq 0 &\iff e^{2x}\geq 9\\ &\iff 2x\geq \ln(9)\\ &\iff x\geq \frac{2\ln 3}{2}\\ &\iff x\geq \ln(3) \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1=[\ln(3);+\infty[.}$$
2. On résout l'inéquation
$$\begin{aligned} \frac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x}<0 &\iff \frac{(2x+1-2)(2x+1+2)}{x(x-4)}<0\\ &\iff \frac{(2x-1)(2x+3)}{x(x-4)}<0 \end{aligned}$$
à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
Signe de $2x-1$	$-$		$-$	$-$ 0 $+$		$+$
Signe de $2x+3$	$-$ 0 $+$		$+$	$+$		$+$
Signe de $x-4$	$-$		$-$	$-$	$-$ 0	$+$
Signe de x	$-$		$-$ 0 $+$	$+$		$+$
Signe de $\dfrac{(2x-1)(2x+3)}{x(x-4)}$	$+$ 0 $-$		$\Vert$	$+$ 0 $-$	$\Vert$	$+$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \left]-\frac{3}{2};0\right[\cup\left]\frac{1}{2};4\right[.}$$

Exercice 118 (Récurrence)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- **Initialisation :** On sait que $A^0 = I_3$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0\times(0+3)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+n+0 & 2+n+\frac{n(n+3)}{2} \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+1+n \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n^2+5n+4}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Or

$$\frac{(n+1)(n+4)}{2} = \frac{n^2+n+4n+4}{2} = \frac{n^2+5n+4}{2}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 119 (Sommes)
Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - 1^2 - 0^2 \\ &\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1} \end{aligned}$$

2. En appliquant la formule du cours

$$\boxed{\sum_{k=6}^{12} k = \frac{7 \times 18}{2} = 63.}$$

3. On calcule enfin

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^{k+1}} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^k} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &\boxed{= \frac{2}{3} \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)} \end{aligned}$$