

Correction Calculs du 19/10 au 01/11

Exercice 106 (Par récurrence)

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$.

- **Initialisation** : On a bien $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc \mathcal{P}_1 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

2. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right\}$.

- **Initialisation** : On a bien $\sum_{k=1}^1 k(k+1) = 2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$ donc \mathcal{P}_1 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$.

Exercice 107 (En factorisant)

Calculer les sommes suivantes en utilisant la propriété de factorisation.

$$\sum_{k=0}^n u_0 q^k = u_0 \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$\sum_{k=0}^n 3^{k-2} = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1}{9} \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = -\frac{1}{18} (1 - 3^{n+1})$$

$$\sum_{k=0}^n x^{2k+2} = x^2 \sum_{k=0}^n x^{2k} = x^2 \sum_{k=0}^n (x^2)^k = x^2 \left(\frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} \right)$$

Exercice 108 (En développant)

Calculer les sommes suivantes en développant les termes à l'intérieur.

$$\sum_{k=0}^n k + k^2 = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n(n+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{6} \right) = n(n+1) \left(\frac{2n+4}{6} \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k^2 + 1) = \sum_{k=0}^n k^3 + k^2 = \sum_{k=0}^n k^3 + \sum_{k=0}^n k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n(n+1))^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3(n(n+1))^2 + 2n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3(n(n+1)) + 2(2n+1))}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n + 4n + 2)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{12}$$

On calcule enfin :

$$\sum_{k=0}^n 2k^3 + 3k = \sum_{k=0}^n 2k^3 + \sum_{k=0}^n 3k = 2 \sum_{k=0}^n k^3 + 3 \sum_{k=0}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n(n+1))^2 + 6n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2(n(n+1)) + 6)}{4} = \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n + 6)}{4} = \frac{n(n+1)(n^2 + n + 3)}{2}$$

Exercice 109

Calculer les sommes en ajoutant ou retranchant des termes.

$$\sum_{k=2}^n k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 - 1 - 0$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k - x^0 \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} - 1 \\ &= \frac{1-x^n-1+x}{1-x} \\ &= \frac{x-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

$$= x \left(\frac{1-x^{n-1}}{1-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) - 0 - 0 \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 110 (Changement d'indice)

Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un changement d'indice.

1. On pose le changement d'indice $j = k - 2$. Donc pour $k = 2$, $j = 0$ et pour $k = n + 2$, $j = n$.

$$\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2} = \sum_{j=0}^n x^j$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. On pose le changement d'indice $j = k - 2$. Donc pour $k = 3$, $j = 1$ et pour $k = n$, $j = n - 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n (k-2)^2 &= \sum_{j=1}^{n-2} j^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} j^2 - 0 \\ &= \frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$$

3. On pose le changement d'indice $j = k - 1$. Donc pour $k = 2$, $j = 1$ et pour $k = n + 1$, $j = n$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3 &= \sum_{j=1}^n j^3 \\ &= \sum_{j=0}^n j^3 - 0 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Exercice 111 (En utilisant une somme télescopique)

1. On calcule $\sum_{k=1}^n k^3 - (k-1)^3$. On reconnaît une somme télescopique de la forme $\sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1}$ ($= u_n - u_0$) avec $u_k = k^3$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n k^3 - (k-1)^3 = n^3 - 0^3 = n^3.$$

2. On calcule $\sum_{k=0}^n e^{k+1} - e^k$. On reconnaît une somme télescopique de la forme $\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k$ ($= u_{n+1} - u_0$) avec $u_k = e^k$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n e^{k+1} - e^k = e^{n+1} - e^0 = e^{n+1} - 1.$$

3. On calcule

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

On reconnaît une somme télescopique de la forme $\sum_{k=2}^n u_{k+1} - u_k$ ($= u_{n+1} - u_2$) avec $u_k = \ln(k)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 112 (Binôme de Newton)

1. Par définition du binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = (2+3)^n = 5^n.$$

2. En ajoutant les 1 qui manquent puis en utilisant le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

3. En appliquant le binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-2)^{n-k} = (2-2)^n = 0.$$