Correction Calculs du 12/10 au 18/10

Exercice 99 (Puissances et racines)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x\sqrt{x})^4}{(x^3 \times x)^2} \\ &= \frac{x^4\sqrt{x}^4}{x^6 \times x^2} \\ &= \frac{x^6}{x^8} \\ &= \boxed{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 8^n - 4^n \times 2^{n+2} \\ &= (2^3)^n - (2^2)^n \times 2^{n+2} \\ &= 2^{3n} - 2^{2n+n+2} \\ &= 2^{3n} - 2^{3n+2} \\ &= 2^{3n} - 4 \times 2^{3n} \\ &= \boxed{-3 \times 2^{3n}} \end{aligned}$$

Exercice 100 (Fonctions usuelles)

1. On regarde si le terme dans la valeur absolue est positif ou négatif. Or

$$\begin{aligned} 3\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) &= \ln(2^3) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= \ln(8) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= \ln\left(\frac{8}{9}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } C = \ln\left(\frac{9}{8}\right).}$$

2. On sait que $e^2 + 1 \geq e^2$ donc $\ln(e^2+1) \geq 2$ et ainsi

$$\boxed{D = \ln(e^2+1).}$$

Exercice 101 (Équations)
Résoudre les équations suivantes :

1.

$$\begin{aligned} (1) \iff && x^3 = x \\ \iff && x^3 - x = 0 \\ \iff && x(x^2-1) = 0 \\ \iff && (x-1)x(x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{-1, 0, 1\}}$$

2.

$$\begin{aligned}
(2) \iff & (x^2+1)^2 = (x^2-1)^2 \\
\iff & (x^2+1)^2 - (x^2-1)^2 = 0 \\
\iff & ((x^2+1)-(x^2-1))((x^2+1)+(x^2-1)) = 0 \\
\iff & 2 \times 2x^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{0\}}$$

Exercice 102 (Limites)

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Finalement
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty.}$$
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x)^3 = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Finalement
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} ((-x)^3\sqrt{x}) = -\infty.}$$

Exercice 103 (Dérivées)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. La fonction $x \to (x^2-2x+2)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2e^x.}$$
2. La fonction $x \to \dfrac{1}{1-e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\boxed{g'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}.}$$
3. La fonction $x \to (\ln x)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{2e^x \times 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&\boxed{= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 104 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation
$$\begin{aligned}
e^{2x-3} - 2 \geq 0 &\iff e^{2x-3} \geq 2 \\
&\iff 2x-3 \geq \ln(2) \\
&\iff 2x \geq \ln(2)+3 \\
&\iff x \geq \frac{\ln(2)+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left[\frac{\ln(2)+3}{2};+\infty\right[.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{3}{x-1} &\Longleftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{x-1} \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} \geq 0\end{aligned}$$

à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\frac{-2x}{(x-1)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \left]-\infty;-1\right[\cup [0;1[.}$$

Exercice 105 (Récurrence)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$. On va montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, i.e. les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_{n+1} \geq u_n\}$.

- **Initialisation :** On a bien $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq u_n\\ u_{n+1}+(n+1) &\geq n+u_n \quad \text{(On rappelle que } n+1 \geq n)\\ \sqrt{u_{n+1}+(n+1)} &= \sqrt{n+u_n}\\ u_{n+2} &= u_{n+1}\end{aligned}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.