Correction Calculs du 5/10 au 11/10

Exercice 92 (Puissances et racines)
On simplifie au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 2-\sqrt{3}+2\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}+2+\sqrt{3} \\ &= 4+2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= 4+2\sqrt{4-3} \\ &\boxed{= 4+2=6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2(-1)^{2n-1}+(-1)^{-n}(-1)^{-n+2} \\ &= 2\times(-1)+(-1)^{-2n+2} \\ &= -2+1 \\ &\boxed{=-1} \end{aligned}$$

Exercice 93 (Équations)
On résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \ln(e^x-3)=0 &\iff e^x-3=1 \\ &\iff e^x=4 \\ &\iff \boxed{x=\ln(4)=2\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x+5)^2=25 &\iff (2x+5)^2-25=0 \\ &\iff (2x+5-5)(2x+5+5)=0 \\ &\iff 2x(2x+10)=0 \\ &\iff \boxed{x=0 \quad ou \quad x=-5} \end{aligned}$$

Exercice 94 (Logarithme et Exponentielle)
On simplifie au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} C &= e^{-\ln(\ln(2))} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(\ln(2))}} \\ &\boxed{=\frac{1}{\ln(2)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \ln\left(\frac{1+e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^{2x}(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}}\right) \\ &= \ln\left(e^{2x}\right) \\ &\boxed{=2x} \end{aligned}$$

Exercice 95 (Limites)
On calcule les limites suivantes

1. On a (puisque $\ln(2)>0$)

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} 2^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln(2)} = 0.}$$

2. On a $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2\sqrt{x})=+\infty.}$$

Exercice 96 (Dérivées)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction usuelle et

$$\boxed{f'(x)=-e^{-x}.}$$

2. La fonction g est dérivable sur $]0;1[\cup]1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\boxed{g'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x)^2} = -\frac{1}{x\ln(x)^2}.}$$

3. La fonction h est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x(\ln(x)+1)-(x\ln(x)-1)}{x^2} \\ &= \frac{x\ln(x)+x-x\ln(x)+1}{x^2} \\ &\boxed{= \frac{x+1}{x^2}} \end{aligned}$$

Exercice 97 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} e^{2x}-2e^x \geq 0 &\iff (e^x)^2-2e^x \geq 0 \\ &\iff e^x(e^x-2) \geq 0 \\ &\iff e^x-2 \geq 0 \quad (\text{car } e^x > 0) \\ &\iff e^x \geq 2 \\ &\iff x \geq \ln(2) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = [\ln(2);+\infty[.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-1} \leq \frac{x-3}{x+2} &\iff \frac{(x+5)(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \\ &\frac{x^2+5x+2x+10-(x^2-3x-x+3)}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \\ &\frac{11x+7}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \end{aligned}$$

On étudie cette inéquation à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{7}{11}$		1		$+\infty$
Signe de $11x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\frac{11x+7}{(x+2)(x-1)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 =]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{7}{11}; 1\right[.}$$

Exercice 98 (Récurrence)
Soit la suite $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. On va Montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n$: $\{$ u_n est bien défini et $u_n > 0.\}$.

- **Initialisation :** u_0 est donné dans l'énoncé. Il est donc bien défini et $u_0 > 0$.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors u_n bien défini et $u_n > 0$. Comme u_n est strictement positif $1 + u_n > 1$ et donc le logarithme est bien défini. Ainsi, u_{n+1} est bien défini. De plus

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\iff 1 + u_n > 1 \\ &\iff \ln(1 + u_n) > \ln(1) \\ &\iff u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx.}$.