Correction Calculs du 28/09 au 04/10

Exercice 85 (Puissances et racines)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} \\ &\boxed{= 7+4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{10^{n+1} - 9\times 10^n - 10^{n+2}}{20\times 10^{n-2} + 8\times 10^{n-1}} \\ &= \frac{10^n\,(10-9-100)}{10^{n-1}(2+8)} \\ &= \frac{-99\times 10^n}{10^n} \\ &\boxed{= -99} \end{aligned}$$

Exercice 86 (Équations)
On résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + 4 = 2 &\iff \frac{2}{x} = -2 \\ &\iff \frac{x}{2} = -2 \\ &\iff \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2x+4)(3x-5) = 0 &\iff -2x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x-5 = 0 \\ &\iff -2x = -4 \quad \text{ou} \quad 3x = 5 \\ &\iff \boxed{x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 87 (Logarithme et Exponentielle)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} C &= \exp(4\ln(e^{-3/4})) \\ &= \exp(\ln(e^{-3/4}))^4 \\ &= \exp(-3/4)^4 \\ &\boxed{= e^{-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \ln\left(\sqrt{5}+2\right) + \ln\left(\sqrt{5}-2\right) \\ &= \ln((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)) \\ &= \ln(5-4) \\ &\boxed{= 0} \end{aligned}$$

Exercice 88 (Limites)
On calcule les limites suivantes.

1. On a $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0+$ donc
$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty}$$
2. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = -\infty$. Enfin, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^3 = 0^+$ donc
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^3} = -\infty.}$$

Exercice 89 (Dérivées)
On calcule les dérivées des fonctions suivantes.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a

$$\boxed{f'(x) = e^x + e^{-x}.}$$

2. On résout $2x+5=0 \iff x = -\dfrac{5}{2}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x-2)(2x+5) - 2(x^2-2x)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{4x^2+10x-4x-10-2x^2+4x}{(2x+5)^2} \\ &\boxed{= \frac{2x^2+10x-10}{(2x+5)^2}} \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$. On a de plus

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{n}{2\sqrt{nx}} e^{nx} + n\sqrt{nx}e^{nx} \\ &\boxed{= n\left(\frac{1+2nx}{2\sqrt{nx}}\right) e^{nx}} \end{aligned}$$

Exercice 90 (Inéquations)
On résout les inéquations suivantes

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} - \frac{1-x}{2} \geq 5 &\iff \frac{2x-4}{6} - \frac{3-3x}{6} \geq 5 \\ &\iff 2x-4-3+3x \geq 30 \\ &\iff 5x - 7 \geq 30 \\ &\iff 5x \geq 37 \\ &\iff \boxed{x \geq \frac{37}{5}} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left[\frac{37}{5}; +\infty\right[.}$$

2. On a

$$\frac{5-3x}{x^2-1} \leq 0 \iff \frac{5-3x}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

On étudie alors cette inéquation à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $5-3x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{5-3x}{x^2-1}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau de signe

$$\boxed{\mathscr{S}_2 =]-1;1[\cup \left[\frac{5}{3};+\infty\right[.}$$

Exercice 91 (Récurrence)
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On va Montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{(1+x)^n \geq 1+nx\}$.

- **Initialisation :** On a $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &\geq 1+nx+x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx.}$.