Correction Calculs du 21/09 au 27/09

Exercice 78 (Somme de limites)
On calcule les limites suivantes.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + \ln(x) = +\infty.}$$
2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{2x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} + x^2 = +\infty\ .}$$
3. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$. Donc
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\>}} \ln(x) - \frac{1}{x} = -\infty.}$$

Exercice 79 (Produit de limites)
On calcule les limites suivantes.

1. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln(x) = -\infty$. Donc
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x}\ln(x) = -\infty.}$$
2. On sait que $\lim\limits_{x\to0} e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} |x| = 0$. Donc
$$\boxed{\lim_{x\to0} e^{-x}|x| = 0}$$
3. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} 1-x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0$. On a donc
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{1-x}\ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = -\infty.}$$

Exercice 80 (Quotient de limites)
On calcule les limites suivantes.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to2^+} x^2+3 = 7$ et $\lim\limits_{x\to2^+} 2-x = 0^-$. Donc
$$\boxed{\lim_{x\to2^+} \frac{x^2+3}{2-x} = -\infty.}$$
2. On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \sqrt{x} = 0^+$ donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.}$$

3. On sait que $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + x} = 0.}$$

Exercice 81 (Limites de composée)
On calcule les limites suivantes.

1. On sait que $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} x^2 - 4 = 0^+$ et que $\lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln(X) = -\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \ln(x^2 - 4) = -\infty.}$$

2. On sait que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{-1/x} = +\infty.}$$

3. On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et que $\lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty.}$$

Exercice 82 (Limites)
On calcule les limites suivantes.

1. On sait que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x - 1 = 0^-$ donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et on sait que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(x) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} + \ln(x) = -\infty.}$$

2. On sait que $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} x - 2 = 0^+$ donc $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \ln\left(\frac{2}{x-2}\right) = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \ln\left(\frac{2}{x-2}\right) = +\infty.}$$

3. On sait que $\lim x \to -\infty e^{-x} + 2 = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \sqrt{e^{-x} + 2} = +\infty.}$$

Exercice 83 (Forme indéterminée - polynôme)
En factorisant les expressions par le terme de plus haut degré, calculez les limites des polynômes suivants.

1. On sait que $x^2 - x + 2 = x^2\left(1 - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 2 = +\infty.}$$

2. On sait que $x^3+x^2-5 = x^3\left(1+\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}\right) = x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3}=0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^3+x^2-5=-\infty.}$$

3. On sait que $x^{57}-x^{24}+5 = x^{57}\left(1-\dfrac{x^{24}}{x^{57}}+\dfrac{5}{x^{57}}\right) = x^{57}\left(1-\dfrac{1}{x^{33}}+\dfrac{5}{x^{57}}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{33}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^{57}}=0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{57}=-\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{57}-x^{24}+5=-\infty.}$$

Exercice 84 (Forme indéterminée - fractions rationnelles)
En factorisant les expressions au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré et en simplifiant, calculez les limites des polynômes suivants.

1. On calcule

$$\frac{x^3-x+2}{x^2+x} = \frac{x^3\left(1-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{x}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=1$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+2}{x^2+x}=+\infty.}$$

2. On calcule,

$$\frac{x^3+x+3}{x^4+3} = \frac{x^3\left(1+\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{3}{x^4}\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{x\left(1+\dfrac{3}{x^4}\right)}?$$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{3}{x^4}=1$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+3}{x^4+3}=0.}$$

3. On calcule

$$\frac{x^2-4x+2}{3x^2+2} = \frac{x^2\left(1-\dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{3x^2\left(1+\dfrac{2}{3x^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{3\left(1+\dfrac{2}{3x^2}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{2}{3x^2}=1$. On conclut donc que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+2}{3x^2+2}=\frac{1}{3}.}$$