Correction Calculs du 14/09 au 20/09

Exercice 71 (Calcul littéral)
Développer puis réduire chaque expression.

$$\begin{aligned} A &= (x+2)^2(x-2)^2 \\ &= ((x+2)(x-2))^2 \\ &= (x^2-4)^2 \\ &\boxed{= x^4-8x^2+16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (5x+4)(2x+3)-(2x+5) \\ &= 10x^2+8x+15x+12-2x-5 \\ &\boxed{= 10x^2+21x+7} \end{aligned}$$

Exercice 72 (Fractions)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} C &= \frac{x^8(x+x^4)}{x^3+x^6} \\ &= \frac{x^9(1+x^3)}{x^3(1+x^3)} \\ &= \frac{x^9}{x^3} \\ &\boxed{= x^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 1+\frac{x^4-x^2}{x^2-1} \\ &= 1+\frac{x^2(x^2-1)}{x^2-1} \\ &\boxed{= 1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 73 (Puissances et racines)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{27}-\sqrt{75}+4\sqrt{12} \\ &= \sqrt{9\times 3}-\sqrt{25\times 3}+4\sqrt{4\times 3} \\ &= 3\sqrt{3}-5\sqrt{3}+8\sqrt{3} \\ &= \boxed{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 8^{n+1}-4^n\times 2^{n+2} \\ &= 2^{3n+3}-2^{2n}\times 2^{n+2} \\ &= 2^{3n+3}-2^{3n+2} \\ &= 2^{3n+2}(2-1) \\ &\boxed{= 2^{3n+2}} \end{aligned}$$

Exercice 74 (Équations)
On résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \iff && \frac{3}{2}x+5 &= -\frac{4}{3} \\ \iff && \frac{3}{2}x &= -\frac{4}{3}-\frac{15}{3} \\ \iff && \frac{3}{2}x &= -\frac{19}{3} \\ \iff && x &= -\frac{38}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{-\frac{38}{9}\right\}}$$

$$(2) \iff x^2+4x+2=0$$

Le discriminant est $\Delta = 16-8=8$

l'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2}$$

$$\iff x_1 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}\right\}}$$

Exercice 75 (Logarithme et Exponentielle)
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} G &= \ln(\sqrt[5]{e}) \\ &= \ln(e^{1/5}) \\ &= \frac{1}{5}\ln(e) \\ &\boxed{= \frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(e^4) - \frac{1}{2}\ln(e^2) \\ &= 2\ln(e) - 1\ln(e) \\ &= 2-1 \\ &\boxed{= 1} \end{aligned}$$

Exercice 76 (Dérivées)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et
$$\boxed{f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x}$$
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($1+x^2 \neq 0$ pour tout x réel. De plus
$$\boxed{g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$
3. On peut écrire $h(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cours). Donc
$$\boxed{h'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

Exercice 77 (Inéquations)
On résout les inéquations suivantes.

1. L'inéquation $(2x-2)(4x+16) < 0$ se résout à l'aide d'un tableau de signe.

   On a $2x-2 > 0 \iff 2x > 2 \iff x > 1$ et $4x+16 > 0 \iff x > -4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $4x+16$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(2x-2)(4x+16)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 =]-4;1[.}$$

2. On résout l'inéquation
$$\begin{aligned} 2(x+1) < 3+2x &\iff 2x+2 < 3+2x \\ &\iff 2 < 3 \end{aligned}$$
   Cette dernière inégalité étant toujours vérifiée,
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \mathbb{R}.}$$