Correction Calculs du 1/09 au 06/09

Exercice 57 (Fonctions polynômiales)

1. La fonction $x \to x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et
$$\boxed{f'(x) = 2x.}$$
2. La fonction $x \to x^3 - 2x^2 + 5x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et
$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 4x + 5.}$$
3. La fonction $x \to (x-2)(x+2) = x^2 - 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et
$$\boxed{f'(x) = 2x.}$$

Exercice 58 (Fonctions rationnelles)

1. Comme $x^2 + 1 \neq 0$, la fonction $x \to \dfrac{1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables et
$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.}$$
2. Comme $2x + 5 = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$, la fonction $x \to \dfrac{x^2-2x+3}{2x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x+5) - 2(x^2-2x+3)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x + 10x - 10 - 2x^2 + 4x - 6}{(2x+5)^2} \\ &= \boxed{\frac{2x^2 + 10x - 16}{(2x+5)^2}} \end{aligned}$$
3. Comme $x^2 + 1 \neq 0$, la fonction $x \to \dfrac{x^3+2x-6}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+2)(x^2+1) - 2x(x^3+2x-6)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 2x^2 + 3x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2 + 12x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^4 + x^2 + 12x + 2}{(x^2+1)^2}} \end{aligned}$$

Exercice 59 (Fonctions exponentielles)

1. La fonction $x \to e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{f'(x) = e^x - e^{-x}.}$$
2. La fonction $x \to e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = 3e^{3x}.}$$

3. La fonction $x \to e^{1-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = -ae^{1-ax}.}$$

Exercice 60 (Fonctions logarithme)

1. Comme $x^3 > 0 \iff x > 0$, la fonction $x \to \ln(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}.}$$

Remarque : On pouvait également remarquer que $\ln(x^3) = 3\ln(x)$ et dériver cette expression.

2. La fonction $x \to x\ln(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables et

$$\boxed{f'(x) = \frac{x}{x} + \ln(x) - 1 = \ln(x).}$$

Remarque : La fonction f est donc une primitive de ln

3. La fonction $x \to \ln(2x) - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables et

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = 0.}$$

Remarque : On aurait également pu utiliser $\ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$. Cette expression étant constante, sa dérivée est nulle.

Exercice 61 (Fonctions Racine carrée)

1. Comme $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$, la fonction $x \to \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $]-\infty; 2]$ et

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}.}$$

2. Comme $\ln(x) > 0 \Longleftarrow x > 1$, la fonction $x \to \sqrt{\ln(x)}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables et

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.}$$

3. Pour déterminer le domaine de dérivabilité de f, on résout $x(x+1) > 0$. A l'aide d'un tableau de signe, on voit que les solutions de cette inéquation sont sur $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$. La fonction $x \to \sqrt{x(x+1)}$ est dérivable sur D en tant que composée de fonctions dérivables et

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}.}$$

Exercice 62

1. La fonction $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \to x^2 - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2-2}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{x^2-2}{2\sqrt{x}} + \frac{4x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \boxed{\frac{5x^2+4x\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

2. Comme on a $1-4x=0 \iff x = \frac{1}{4}$, la fonction $x \to \frac{1}{1-4x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{-(-4)}{(1-4x)^2} = \frac{4}{(1-4x)^2}}$$

Exercice 63 (Fonction composée)

1. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables et

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x}(\ln(x))^2 = \boxed{\frac{3(\ln(x))^2}{x}}.$$

2. On a $3x+2 > 0 \iff x > -\frac{2}{3}$. De plus x doit être différent de 5 (fraction). Donc la fonction $x \to \frac{\sqrt{3x+2}}{x-5}$ est dérivable sur $\left]-\frac{2}{3};5\right[\cup]5;+\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x-5) - \sqrt{3x+2}}{(x-5)^2} \\ &= \frac{\frac{3x-15}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{3x+2}{\sqrt{3x+2}}}{(x-5)^2} \\ &= \frac{\frac{3x-15-(6x+4)}{2\sqrt{3x+2}}}{(x-5)^2} \\ &= \boxed{\frac{-3x-19}{2\sqrt{3x+2}(x-5)^2}} \end{aligned}$$

3. Comme $2x-3>0 \iff x > \frac{3}{2}$, la fonction $x \to x^2\sqrt{2x-3}$ est dérivable sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ en tant que

composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\sqrt{2x-3} + \frac{2x^2}{2\sqrt{2x-3}} \\
&= \frac{2x(2x-3)}{\sqrt{2x-3}} + \frac{x^2}{\sqrt{2x-3}} \\
&= \frac{4x^2-6x+x^2}{\sqrt{2x-3}} \\
&= \frac{5x^2-6x}{\sqrt{2x-3}} \\
&= \boxed{\frac{x(5x-6)}{\sqrt{2x-3}}}
\end{aligned}$$

4. La fonction $x \to \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que quotient et composée de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \times \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} \times \frac{x+3}{x-1} \\
&= \boxed{-8 \times \frac{x+3}{(x-1)^3}}
\end{aligned}$$