Correction Calculs du 24/08 au 30/08

Exercice 50 (Inéquations simple)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} x+4<-7 &\iff x<-7-4 \\ &\iff x<-11 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 =]-\infty;-11[.}$$

2. On résout l'inéquation

$$3x<-2 \iff x<-\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]-\infty;-2/3[.}$$

3. On résout l'inéquation

$$-2x<8 \iff x>-4$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 =]-4;+\infty[.}$$

4. On résout l'inéquation

$$-5x \geq -15 \iff x \leq 3$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_4 =]-\infty;3].}$$

Exercice 51 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} 5x-3<-4x &\iff 5x+4x<3 \\ &\iff 9x<3 \\ &\iff x<\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} -3x+15<-72-2x &\iff 15+72<-2x+3x \\ &\iff 87<x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]87;+\infty[.}$$

3. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} 14x-25 \leq 17x+50 &\iff -25-50 \leq 17x-14x \\ &\iff -75 \leq 3x \\ &\iff -25 \leq x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 = [-25;+\infty[.}$$

Exercice 52 (Inéquations et fractions)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}\frac{3x}{4}-\frac{2}{3}<-\frac{4}{9} &\iff \frac{27x}{36}-\frac{24}{36}<-\frac{16}{36}\\ &\iff 27x-24<-16\\ &\iff 27x<8\\ &\iff x<\frac{8}{27}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1=\left]-\infty;\frac{8}{27}\right[.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}\frac{2x}{5}+\frac{4}{7}\geq\frac{7x}{10}-\frac{3}{14} &\iff \frac{4x}{10}+\frac{8}{14}\geq\frac{7x}{10}-\frac{3}{14}\\ &\iff \frac{8}{14}+\frac{3}{14}\geq\frac{7x}{10}-\frac{4x}{10}\\ &\iff \frac{11}{14}\geq\frac{3x}{10}\\ &\iff \frac{11}{14}\times\frac{10}{3}\geq x\\ &\iff \frac{55}{21}\geq x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2=\left]-\infty;\frac{55}{21}\right].}$$

3. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}\frac{-3x}{7}+\frac{2}{5}\leq\frac{7x}{2}+\frac{3}{7} &\iff \frac{-6x}{14}+\frac{14}{35}\leq\frac{49x}{14}+\frac{15}{35}\\ &\iff \frac{14}{35}-\frac{15}{35}\leq\frac{49x}{14}+\frac{6x}{14}\\ &\iff -\frac{1}{35}\leq\frac{55x}{14}\\ &\iff -\frac{1}{7\times5}\times\frac{7\times2}{55}\leq x\\ &\iff -\frac{2}{275}\leq x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3=\left[-\frac{2}{275};+\infty\right[.}$$

Exercice 53 (Factorisation et inéquation)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}(x-2)(2x+5)-(3x+3)(2x+5)>0 &\iff (2x+5)((x-2)-(3x+3))>0\\ &\iff (2x+5)(-2x-5)>0\\ &\iff -(2x+5)(2x+5)>0\\ &\iff -(2x+5)^2>0\end{aligned}$$

Or un carré étant toujours positif, $-(2x+5)^2\leq 0$ et donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \emptyset.}$$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} x \leq 2x(5x+3) &\iff 0 \leq 2x(5x+3) - x \\ &\iff 0 \leq x(10x+6-1) \\ &\iff 0 \leq x(10x+5) \\ &\iff 0 \leq 5x(2x+1) \end{aligned}$$

On réalise alors un tableau de signe pour déterminer quand l'expression de droite est positive

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $5x(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [0; +\infty[.}$$

3. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} (x+7)(3x-4) \geq (x+7)(-5x+3) &\iff (x+7)(3x-4) - (x+7)(-5x+3) \geq 0 \\ &\iff (x+7)((3x-4) - (-5x+3)) \geq 0 \\ &\iff (x+7)(3x-4+5x-3) \geq 0 \\ &\iff (x+7)(8x-7) \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-7		$7/8$		$+\infty$
Signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $8x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+7)(8x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 =]-\infty; -7] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty\right[.}$$

4. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}(x+3)(2x+1) \leq (2x+1)(4x+2) &\iff (x+3)(2x+1)-(2x+1)(4x+2) \leq 0\\ &\iff (2x+1)((x+3)-(4x+2)) \leq 0\\ &\iff (2x+1)(-3x+1) \leq 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/3$		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+1)(-3x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_4 = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[.}$$

Exercice 54 (Inéquations du second degré)

1. Pour résoudre l'inéquation $x^2+x-2>0$, on cherche les solutions de $x^2+x-2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1-4\times(-2)\times 1 = 9$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[.}$$

2. Pour résoudre l'inéquation $-3x^2+x-2 \leq 0$, on cherche les solutions de $-3x^2+x-2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1-4\times(-2)\times(-3) = -23$. Cette équation n'a donc pas de solutions, par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-3x^2+x-2<0$ (car le signe de a est négatif)

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \mathbb{R}.}$$

3. Pour résoudre l'inéquation $2x^2+3x \geq 0$, on cherche les solutions de $2x^2+3x=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9-4\times(2)\times 0 = 9$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-3-3}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-3+3}{2} = 0$$

On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		$-3/2$		0		$+\infty$
Signe de $2x^2+3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [0; +\infty[.}$$

Remarque : On aurait également pu factoriser le membre de gauche par x et étudier le signe des 2 termes en x comme à l'exercice précédent.

4. Pour résoudre l'inéquation $2x^2 - 8 \geq 0$, on cherche les solutions de $2x^2 - 8 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 0 - 4 \times (-8) \times 2 = 64$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $2x^2-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 =]-2; 2[.}$$

Remarque : Un autre raisonnement, source d'erreurs fréquentes est pourtant très prisé des étudiants, à savoir

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 < 0 &\Longleftrightarrow 2x^2 < 8 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \end{aligned}$$

A partir de là, on prend la racine carrée de chaque côté et on en déduit que $x < 2$. Ceci est faux ! Car $\sqrt{x^2} \neq x$. Le vrai raisonnement est

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 < 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \\ &\Longleftrightarrow |x| < 2 \\ &\Longleftrightarrow x \in]-2; 2[\end{aligned}$$

On verra cette dernière propriété en cours.

Exercice 55 (Inéquations et fractions)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{x+3}\leq 0 &\iff \frac{x+3-1}{x+3}\leq 0\\ &\iff \frac{x+2}{x+3}\leq 0 \end{aligned}$$

On a alors le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x+2}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1=]-3;-2].}$

2. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1}<\frac{2}{x+3} &\iff \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+3}<0\\ &\iff \frac{x+3}{(x-1)(x+3)}-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)}<0\\ &\iff \frac{x+3-2x+2}{(x-1)(x+3)}<0\\ &\iff \frac{-x+5}{(x-1)(x+3)}<0 \end{aligned}$$

On réalise alors le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
Signe de $-x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{-x+5}{(x-1)(x+3)}$		$+$		$-$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]-3;1] \cup]5;+\infty[.}$$

3. Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-3x+2}{e^x-1} \geq 0$, on s'intéresse au signe du numérateur et du dénominateur. Pour le numérateur, on s'intéresse aux solutions de $x^2-3x+2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9-4\times 2\times 1 = 1$. Cette équation a donc 2 solutions

$$x_1 = \frac{-(-3)-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3)+1}{2} = 2$$

Pour le dénominateur, on résout une inéquation de manière directe :

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\Longleftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Signe de x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de e^x-1		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x^2-3x+2}{e^x-1}$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 =]0;1] \cup [2;+\infty[.}$$

Exercice 56 (Inéquations plus difficile)

1. On résout la première équation par une **méthode directe** :

$$\begin{aligned}\ln(2x-3) \leq \ln(5) &\iff 2x-3 \leq 5 \quad \text{(On prend } x \to e^x \text{ de chaque côté)}\\ &\iff 2x \leq 8\\ &\iff x \leq 4\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc à priori $]-\infty;4]$. Mais il faut également vérifier pour que $\ln(2x-3)$ existe :

$$2x-3>0 \iff x > \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{En conclusion, l'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left]\frac{3}{2};4\right].}$$

2. La deuxième méthode consiste à factoriser ce que l'on peut et d'étudier le signe à l'aide d'un **tableau de signe.**

$$\begin{aligned}\frac{x^3+5x^2}{6x} \leq 1 &\iff \frac{x^2(x+5)}{6x} - 1 \leq 0\\ &\iff \frac{1}{6}(x(x+5)) - 1 \leq 0\\ &\iff \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1 \leq 0\end{aligned}$$

On cherche alors les solutions de $\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{25}{36} - 4 \times \frac{1}{6} \times (-1) = \frac{49}{36}$. On a alors deux solutions

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{6} - \frac{7}{6}}{\frac{2}{6}} = -6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{5}{6} + \frac{7}{6}}{\frac{2}{6}} = 1$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
Signe de $\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = [-6;1].}$$

3. Enfin, la dernière méthode est à privilégier quand les 2 premières ont échouées. **On pose et étudie une fonction adaptée.**

$$e^x > x \iff e^x - x > 0$$

On décide alors de poser la fonction $f : x \to e^x - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x - 1$$

On résout alors l'inéquation

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$$

On en déduit alors le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

D'après le tableau de variation de f, on voit que pour tout x réel, $e^x - x \geq 1 > 0$, donc $e^x > x$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 = \mathbb{R}.}$$

Remarque : Cet exercice illustre les 3 méthodes principales pour résoudre les inéquations.