Correction Calculs du 17/08 au 23/08

Exercice 43 (Simplification en fonction de $\ln(2)$)
Écrire sous la forme $a\ln(2)$ où a est un entier :

1. $\boxed{\ln(16) = \ln(2^4) = 4\ln(2)}$
2. $\boxed{\ln(512) = \ln(2^9) = 9\ln(2)}$

Et pour le dernier,

$$\begin{aligned}\ln(72) - 2\ln(3) &= \ln(9\times 8) - 2\ln(3)\\ &= \ln(9) + \ln(8) - 2\ln(3)\\ &= 2\ln(3) + \ln(2^3) - 2\ln(3)\\ &= \boxed{3\ln(2)}\end{aligned}$$

Exercice 44 (Simplification de logarithme)
Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\ln(b)$. Pour les expressions 1. et 2.

$$\begin{aligned}\ln(2x) - \ln(x) &= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x)\\ &= \boxed{\ln(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(2x+2) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) &= \ln(2) + \ln(x+1) - \ln(x+1)\\ &= \boxed{\ln(2)}\end{aligned}$$

Pour les expressions 3. et 4.

$$\begin{aligned}2\ln(x^4) - 3\ln(x^2) + \ln(x) &= 8\ln(x) - 6\ln(x) + \ln(x)\\ &= \boxed{3\ln(x)}\end{aligned}$$

$$\ln(x+1) - \ln(x+2) = \boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$$

Exercice 45 (Simplification en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$)
Simplifier les expressions suivantes en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$.

$$\begin{aligned}\ln(500) &= \ln(5) + \ln(100)\\ &= \ln(5) + \ln(25) + \ln(4)\\ &= \boxed{2\ln(2) + 3\ln(5)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{16}{25}\right) &= \ln(16) - \ln(25)\\ &= \boxed{4\ln(2) - 2\ln(5)}\end{aligned}$$

Pour les expressions 3. et 4.

$$\begin{aligned}\ln(0,25) &= \ln\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= -\ln(4)\\ &= \boxed{-2\ln(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{100}\right)\\ &= -\ln(100)\\ &= -\left(\ln(25) + \ln(4)\right)\\ &= \boxed{-2\ln(5) - 2\ln(2)}\end{aligned}$$

Exercice 46 (Simplification de l'exponentielle)
Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(e) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Pour les expressions 3. et 4.

$$e^{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{e^{\ln(3)}}{e^{\ln(2)}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(e) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Exercice 47 (Résolution d'équation)

1. On résout l'équation

$$e^x = 2 \Longleftrightarrow x = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \{\ln(2)\}.}$$

2. On résout l'équation

$$\begin{aligned}(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0 &\Longleftrightarrow \ln(x) - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + \ln(x) = 0\\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = 2 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -1\\ &\Longleftrightarrow x = e^2 \quad \text{ou} \quad x = e^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \{e^{-1}; e^2\}.}$$

3. On résout l'équation

$$\begin{aligned}(e^x - 3)(e^x + 5) = 0 &\Longleftrightarrow e^x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad e^x + 5 = 0\\ &\Longleftrightarrow e^x = 3 \quad \text{ou} \quad e^x = -5\\ &\Longleftrightarrow x = \ln(3) \quad \text{ou impossible car exponentielle positive}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 = \{\ln(3)\}.}$$

4. On résout l'équation

$$\begin{aligned}(\ln x - 1)(6 - 3\ln x) = 0 &\Longleftrightarrow \ln x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 6 - 3\ln x = 0\\ &\Longleftrightarrow \ln x = 1 \quad \text{ou} \quad 3\ln x = 6\\ &\Longleftrightarrow x = e \quad \text{ou} \quad \ln x = 2\\ &\Longleftrightarrow x = e \quad \text{ou} \quad x = e^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_4 = \{e; e^2\}.}$$

Exercice 48 (Changement de variable)

I) On résout l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4 \times (-15) \times 1 = 64$. Les solutions sont donc

$$X_1 = \frac{2-8}{2} = -3$$

$$X_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S} = \{-3; 5\}.}$$

II) En utilisant le changement de variable $X = e^x$ (on a $X > 0$), l'équation se réécrit

$$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x - 15 = 0 &\iff X^2 - 2X - 15 = 0 \quad \text{et} \quad X > 0 \\ &\iff X = 5,\ X = -3 \quad \text{et} \quad X > 0 \\ &\iff X = 5 \\ &\iff x = \ln(5) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \{\ln(5)\}.}$$

De même, en posant le changement de variable $X = \ln(x)$, l'équation se réécrit

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0 &\iff X^2 - 2X - 15 = 0 \\ &\iff X = 5, \quad \text{ou} \quad X = -3 \\ &\iff x = e^5 \quad \text{ou} \quad x = e^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 = \{e^{-3}; e^5\}.}$$

Exercice 49 (Plus difficile)
Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{5-1}{4}\right) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right) &= \ln(e^2) - \ln(e) \\ &= 2 - 1 \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

Pour les expressions 2. et 4.

$$\begin{aligned} &\ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) \\ =&20\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 20\ln\left(2-\sqrt{3}\right) \\ =&20\ln\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right) \\ =&20\ln(4-3) \\ =&\boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right) \\ =&\frac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln(e^2))\right) \\ =&-\frac{1}{2}\ln(e^2) \\ =&\boxed{-1} \end{aligned}$$